

A. F. Grishin, I. V. Poedintseva

Abelian and Tauberian theorems for integrals

MSC subject classification. 40D05, 40E05, 28A33

A new method of obtaining Abelian and Tauberian theorems for the integral of the form $\int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t)$ is proposed. It is based on the use of limit sets of the measures. A version of Azarin's sets is constructed for Radon's measures on the ray $(0, \infty)$. Abelian theorems of a new type are proved in which asymptotic behavior of the integral is described in terms of these limit sets. Using these theorems together with an improved version of the well-known Carleman's theorem on analytic continuation, a substantial improvement of the second Wiener Tauberian theorem is obtained.

Reference: 25 units.

Keywords: proximate order of Valiron, Radon's measures, Azarin's limit set of measure, Azarin's regular measure, Tauberian theorem of Wiener.

Comments: 73 pages, in Russian.

Предлагается новый метод получения абелевых и тауберовых теорем для интегралов вида $\int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t)$. Он базируется на использовании свойств предельных множеств мер. Для этого строится вариант теории предельных множеств Азарина для радоновых мер на полуоси $(0, \infty)$. Доказываются абелевы теоремы нового типа, в которых асимптотическое поведение вышеназванных интегралов описывается в терминах предельных множеств мер μ . Используя эти теоремы, а также доказанный в статье усиленный вариант известной леммы Карлемана об аналитическом продолжении, доказывается значительное усиление второй тауберовой теоремы Винера.

Библиография: 25 названия.

Ключевые слова: уточнённый порядок Валирона, радонова мера, предельное множество Азарина меры, регулярная мера Азарина, тауберова теорема Винера.

Содержание

1	Вступление	2
2	Об уточнённом порядке	7
3	Меры, предельные множества мер	19
4	Абелевы теоремы для интегралов	38
5	Тауберовы теоремы для интегралов	60
	Список литературы	72

1 Вступление

Поскольку уточнённый порядок встречается в формулировках большинства утверждений предлагаемой работы, то мы начнём с некоторых обозначений и результатов, связанных с уточнённым порядком.

Уточнённый порядок $\rho(r)$ играет важную роль в теории абелевых и тауберовых теорем, в теории роста субгармонических функций, в теории вероятностей. Из того, что $\rho(r)$ – уточнённый порядок, следует, что функция $V(r) = r^{\rho(r)}$ является регулярно меняющейся функцией в смысле Караматы. Изложение некоторых свойств уточнённого порядка можно найти в [1]. Появившаяся позже книга [2] является энциклопедическим трудом по регулярно меняющимся функциям и их приложениям.

До знакомства с формальным определением уточнённого порядка читатель может считать, что $V(r) = r^\rho a(r)$,

$$a(r) = \begin{cases} \ln^\alpha(er), & r \geq 1, \\ \ln^\alpha \frac{e}{r}, & r \in (0, 1), \end{cases}$$

где ρ и α – произвольно выбранные вещественные числа.

Пусть $\rho = \rho(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$. Если обозначить

$$\gamma(t) = \sup_{r > 0} \frac{V(rt)}{t^\rho V(r)}, \quad (1.1)$$

то очевидно, что при $r > 0$ и $t > 0$ выполняется неравенство $V(rt) \leq t^\rho \gamma(t) V(r)$.

В теореме 2.5 (нумерация теорем во введении совпадает с их нумерацией в тексте работы) доказывается, что $\gamma(t)$ – непрерывная функция и что выполняются равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \gamma(t)}{\ln t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \gamma\left(\frac{1}{t}\right)}{\ln t} = 0.$$

Эта теорема немного усиливает результат Поттера [3] и значительно упрощает его формулировку. Она – важный инструмент при работе с уточнённым порядком. В дальнейшем тексте работы символ $\gamma(t)$ не будет использоваться для обозначения других функций.

Сейчас мы определим два класса радоновых мер на полуоси $(0, \infty)$. В работе, в основном, изучаются меры из этих классов.

Через $\mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$ мы обозначим множество радоновых мер на полуоси $(0, \infty)$, для которых выполняется неравенство

$$\sup_{r \geq 1} \frac{|\mu|([r, er])}{V(r)} < \infty.$$

Через $\mathfrak{M}(\rho(r))$ мы обозначим множество радоновых мер на полуоси $(0, \infty)$, для которых выполняется неравенство

$$\sup_{r > 0} \frac{|\mu|([r, er])}{V(r)} < \infty.$$

Если выполняется соотношение

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mu|([r, er])}{V(r)} \in (0, \infty),$$

то уточнённый порядок $\rho(r)$ будем называть *уточнённым порядком* меры μ , а число $\rho = \rho(\infty)$ будем называть порядком радоновой меры μ . Такое определение порядка позволяет рассматривать радоновы меры любого вещественного порядка.

Предельное множество $Fr[\mu] = Fr[\rho(r), \mu]$ радоновой меры μ мы определяем вслед за Азариным как множество мер ν вида $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{t_n}$, где $t_n \rightarrow \infty$, а мера μ_t определяется равенством

$$\mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)}.$$

Равенство $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{t_n}$ означает, что последовательность мер μ_{t_n} *широко сходится* к мере ν . Определение широкой сходимости дано в разделе 3.

Доказывается, что если $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, то множество $Fr[\mu]$ обладает свойствами, перечисленными в соответствующей теореме Азарина [4]. Эти свойства также перечислены в теореме 3.10 нашей работы. Азарин рассматривал только положительные меры в \mathbb{R}^n и определял уточнённый порядок меры несколько по-иному, что возможно только для случая $\rho > 0$. В этом случае наше определение уточнённого порядка меры, эквивалентно тому, которое использовал Азарин. Отметим ещё, что Азарин рассматривал сходимость мер отличную от той, которая рассматривается в статье.

Мера μ называется *регулярной* мерой или *мерой регулярной в смысле Азарина*, если предельное множество $Fr[\mu]$ состоит из единственной меры ν . В этом случае мера ν с необходимостью имеет вид $d\nu(t) = ct^{\rho-1}dt$ (теорема 3.17).

В статье будет использоваться как стандартные такие обозначения.

1. Функция $\Psi(r)$,

$$\Psi(r) = \int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t). \quad (1.2)$$

В некоторых случаях вместо $\Psi(r)$ мы будем использовать более информативное обозначение $\Psi(K, r)$.

2. Функция $J(r) = \frac{1}{V(r)}\Psi(r)$.

3. Мера s , $ds(t) = \Psi(t)dt$.

Через $\mu(t)$ мы будем обозначать функцию распределения меры μ , так что $\mu((a, b]) = \mu(b) - \mu(a)$.

Предельное множество функции $f(r)$ по направлению $r \rightarrow \infty$ (множество пределов вида $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n)$, где $r_n \rightarrow \infty$) мы будем обозначать $L(f, \infty)$.

Функцию $f(r)$ мы будем называть *финитной* функцией на полуоси $(0, \infty)$, если $\text{supp } f \subset [a, b] \subset (0, \infty)$.

Использование свойств множества $Fr[\mu]$ позволило получить несколько новых теорем абелева и тауберова типов для интегралов вида (1.2).

Теоремы *абелева* типа – это теоремы, в которых исходя из свойств меры μ находят свойства функции Ψ .

Теоремы *тауберова* типа – это теоремы, в которых исходя из свойств функции Ψ находят свойства меры μ .

Во многих известных теоремах абелева типа утверждается, что из формулы $\mu'(t) \sim A \frac{V(t)}{t}$ ($t \rightarrow \infty$) вытекает асимптотическая формула $\Psi(r) \sim BV(r)$. Теоремы такого типа можно найти, в частности, в книгах [5], [6], [2], [7].

Сформулируем простейшую теорему абелева типа из нашей работы.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, K – непрерывное финитное ядро на полуоси $(0, \infty)$. Тогда выполняется равенство

$$L(J, \infty) = \left\{ \int_0^\infty K(t) d\nu(t) : \nu \in Fr[\mu] \right\}.$$

Другие теоремы абелева типа в представленной работе – это аналоги теоремы 4.1, которые получаются при различных ограничениях на ядро K и меру μ . В одних случаях мы отказываемся от требования финитности ядра K . В других более сложных случаях мы также отказываемся от требования непрерывности ядра K . В общем случае ядро K – это борелевская функция на полуоси $(0, \infty)$.

Отметим важное различие между упомянутыми выше предшествующими результатами и результатами представленными в этой работе. В предшествующих теоремах исследуются случаи, когда μ является регулярной мерой. В наших теоремах исследуется значительно более широкий класс мер. Например, в теореме 4.1 это класс $\mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$.

При отказе от непрерывности ядра K в случае общих радоновых мер предельное множество $Fr[\mu]$ уже не определяет множество $L(J, \infty)$, как это видно из теоремы 4.2.

Важным новым результатом является утверждение, что в случае разрывных ядер K предельное множество $Fr[\mu]$ меры μ однозначно определяет множество $Fr[s]$. Одним из достижений работы является то, что вводится в рассмотрение предельное множество $Fr[s]$ меры s . Следующая теорема – это один из основных результатов работы. Напомним, что функция $\gamma(t)$ определяется равенством (1.1).

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}(\rho(r))$. Пусть K – борелевская функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что $t^{\rho-1}\gamma(t)K(t) \in L_1(0, \infty)$, Ψ – функция определяемая равенством (1.2). Тогда мера s , $ds(t) = \Psi(t)dt$, принадлежит классу $\mathfrak{M}(\rho(r) + 1)$ и её предельное множество $Fr[\rho(r) + 1, s]$ состоит из абсолютно непрерывных мер, множество плотностей которых имеет вид

$$\left\{ \int_0^\infty K\left(\frac{t}{u}\right) d\nu(t) : \nu \in Fr[\mu] \right\}.$$

В тех случаях, когда из наших теорем получается равенство $L(J, \infty) = \{0\}$, вопрос о порядке роста функции $\Psi(r)$ на бесконечности остаётся открытым.

Рассмотрим случай, когда K – бесконечно дифференцируемое финитное ядро на полуоси $(0, \infty)$. В этом случае наряду с формулой (1.2) для функции $\Psi(r)$ справедливы формулы

$$(-1)^{n+1} r^{n+1} \Psi(r) = \int_0^\infty K^{(n+1)}\left(\frac{t}{r}\right) F_n(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.3)$$

где $F_0(t) = \mu(t)$, $F'_{n+1}(t) = F_n(t)$.

Ставится вопрос: позволяют ли теорема 4.1 и равенства (1.3) определить порядок роста функции $\Psi(r)$ на бесконечности? Этот вопрос исследуется в конце раздела 4. Ответ следующий. В рассматриваемом случае теорема 4.1 и равенства (1.3) часто дают ответ о порядке роста функции $\Psi(r)$ на бесконечности. Однако, имеются различные исключительные случаи. В этих случаях вопрос о порядке роста функции $\Psi(r)$ на бесконечности выходит за рамки нашей работы.

Обратимся теперь к теоремам тауберова типа. Важными результатами тауберовой теории являются тауберовы теоремы Винера. Сформулируем эти теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $F(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-i\lambda x}dx \neq 0$ при $\lambda \in (-\infty, \infty)$, $g(x)$ – измеримая ограниченная функция на вещественной оси. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)g(y)dy = A \int_{-\infty}^{\infty} F(y)dy.$$

Тогда для любой функции $H \in L_1(-\infty, \infty)$ выполняется равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)g(y)dy = A \int_{-\infty}^{\infty} H(y)dy.$$

Обозначим через M пространство непрерывных функций F на оси $(-\infty, \infty)$ с конечной амальгам-нормой

$$\|F\|_M = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \max\{|F(x)| : x \in [n, n+1]\}.$$

Следующую теорему часто называют второй тауберовой теоремой Винера.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $F \in M$, $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-i\lambda x}dx \neq 0$ при $\lambda \in (-\infty, \infty)$, и пусть ν – радонова мера на вещественной оси, такая, что для некоторого $B > 0$ и любого целого n выполняется неравенство $|\nu|([n, n+1]) \leq B$. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)d\nu(y) = A \int_{-\infty}^{\infty} F(y)dy.$$

Тогда для любой функции $H \in M$ выполняется равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)d\nu(y) = A \int_{-\infty}^{\infty} H(y)dy.$$

Нам будет удобно иметь дело с мультипликативным вариантом теоремы 1.2, который получается из теоремы 1.2 заменой переменной $y = \ln t$ в интегралах и использованием обозначений $x = \ln r$, $K(t) = \frac{1}{t}F(-\ln t)$, $d\mu(t) = td\nu(\ln t)$.

Обозначим через M_1 пространство непрерывных функций K на полуоси $(0, \infty)$, для которых сходится ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^n$, где $K_n = \max\{|K(x)| : x \in [e^n, e^{n+1}]\}$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $K(t) \in M_1$, $\int_0^{\infty} K(t)t^{i\lambda} dt \neq 0$ при $\lambda \in (-\infty, \infty)$, пусть μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$ такая, что для некоторого $B > 0$ и любого целого n выполняется неравенство $|\mu|([e^n, e^{n+1}]) \leq B e^n$. Пусть

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t) = A \int_0^{\infty} K(t) dt.$$

Тогда для любой функции $Q \in M_1$ выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} Q\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t) = A \int_0^{\infty} Q(t) dt.$$

Формулировка теоремы 1.3 наследует винеровскую формулировку тауберовой теоремы. Однако, эта теорема эквивалентна теореме с более стандартной формулировкой для тауберовых теорем.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $K(t) \in M_1$, $\int_0^{\infty} K(t)t^{i\lambda} dt \neq 0$ при $\lambda \in (-\infty, \infty)$, пусть μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$ такая, что для некоторого $B > 0$ и любого целого n выполняется неравенство $|\mu|([e^n, e^{n+1}]) \leq B e^n$. Пусть существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t) = c.$$

Тогда предельное множество $Fr[\mu]$ меры μ состоит из единственной меры ν , $d\nu(x) = \frac{c}{c_1} dx$, $c_1 = \int_0^{\infty} K(t) dt$.

Теорема 1.4 есть тривиальное следствие теоремы 1.3, в чём легко убедиться, если посмотреть в тексте статьи на точное определение предельного множества, где расшифровывается соотношение $\mu_{t_n} \rightarrow \nu$. В свою очередь, теорема 1.3 есть следствие теоремы 1.4 и соответствующей абелевой теоремы.

Рассмотрим тауберову теорему, доказанную в работе.

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$ из класса $\mathfrak{M}(\rho(r))$, K – борелевская функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что $t^{\rho-1} \gamma(t) K(t) \in L_1(0, \infty)$. Пусть функция $\int_0^{\infty} K(t)t^{\rho-1+i\lambda} dt$ не обращается в ноль на вещественной оси и пусть функция $\Psi(r)$ определяется равенством (1.2). Тогда если мера s , $ds(t) = \Psi(t)dt$, является регулярной мерой относительно уточнённого порядка $\rho(r) + 1$, то мера μ является регулярной мерой относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, причём если $Fr[s]$ состоит из меры с плотностью ct^ρ , то $Fr[\mu]$ состоит из меры с плотностью $\frac{c}{c_1} t^{\rho-1}$, где $c_1 = \int_0^{\infty} K(t)t^{\rho-1} dt$.

1. В теореме 1.4 рассматривается случай $\rho(r) \equiv 1$, в теореме 5.8 рассматривается произвольный уточнённый порядок. Однако и частный случай теоремы 5.8, когда $\rho(r) \equiv 1$, значительно сильнее теоремы 1.4. Рассмотрим более подробно этот случай.

2. Значительно ослабляется требование на ядро K . При этом допускаются разрывы у ядра K и локальная неограниченность ядра K . В теореме 1.4 требуется, чтобы ядро K было непрерывным и сходиллся ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^n$. В рассматриваемом частном случае теоремы 5.8 это требование ослабляется до требования $K(t) \in L_1(0, \infty)$.

3. Требование существования предела $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \Psi(r)$ в рассматриваемом варианте теоремы 5.8 ослабляется, грубо говоря (точные формулировки см. в теоремах 3.19, 3.20), до требования существования предела $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \int_1^r \Psi(t) dt$.

Вместе с тем заключения в теореме 1.4 и рассматриваемом варианте теоремы 5.8 одинаковые.

Теорема 5.8 является также усилением теоремы Бингхема, Голди и Теугелса [2], раздел 4.9, теорема 4.9.1. Последняя теорема также цитируется в [7], глава 4, теорема 9.3. В теореме Бингхема, Голди и Теугелса так же, как и в теореме 5.8, рассматривается произвольный уточнённый порядок. Однако в указанной теореме рассматриваются только положительные меры и требуется конечность амальгам-нормы ядра K .

Несколько слов о доказательстве теоремы 5.8. Теорема 4.8 сводит доказательство теоремы 5.8 к доказательству единственности решения интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} K\left(\frac{t}{r}\right) d\nu(t) = cr^{\rho}$$

с неизвестной мерой ν . Такое доказательство проводится методом Карлемана. При этом приходится усиливать лемму Карлемана об аналитическом продолжении.

В работе также доказывается вариант теоремы 5.8, где функции $\int_0^{\infty} K(t) t^{\rho-1+i\lambda} dt$ разрешается обращаться в ноль на вещественной оси в конечном числе точек.

2 Об уточнённом порядке

Пусть $f(r)$ – положительная функция на полуоси $(0, \infty)$ и перед нами стоит задача описать асимптотическое поведение функции f на бесконечности. Важной числовой характеристикой функции f является её *порядок* ρ , который определяется по формуле

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln f(r)}{\ln r}.$$

В общем случае величина ρ есть элемент расширенной числовой прямой $[-\infty, \infty]$. Соотношением $\rho \in (-\infty, \infty)$ выделяется важный класс функций – функций конечного порядка. В дальнейшем мы будем рассматривать функции конечного порядка.

Если ρ – порядок функции f , а ε – произвольное строго положительное число, то выполняется следующая система неравенств

$$\begin{aligned} f(r) &< r^{\rho+\varepsilon}, & r &\geq R(\varepsilon), \\ f(r) &> r^{\rho-\varepsilon}, & r &\in E, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где E – некоторое, зависящее от ε и f , неограниченное множество. Если в конкретной задаче система неравенств (2.1) является слишком грубой, то приходится вводить более тонкие характеристики роста функции f , чем порядок.

Типом функции f при порядке ρ называется величина

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r^\rho}.$$

Как показывает пример $f(r) = Ar^\rho(\ln(e+r))^\beta$, $A > 0$, $\beta \in (-\infty, \infty)$, для функций порядка ρ величина σ может быть произвольным элементом множества $[0, \infty]$.

В зависимости от того, какое из соотношений $\sigma = 0$, $\sigma \in (0, \infty)$, $\sigma = \infty$ выполняется, функция f называется функцией *минимального*, *нормального* или *максимального* типа при порядке ρ . Если $\sigma < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} f(r) &< (\sigma + \varepsilon)r^\rho, & r &\geq R(\varepsilon), \\ f(r) &> (\sigma - \varepsilon)r^\rho, & r &\in E, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где E – некоторое неограниченное множество, зависящее от f и ε . Неравенства (2.2) – это значительно более точные неравенства, чем неравенства (2.1).

Будем говорить, что функция $f(r)$ растёт на бесконечности как функция $\varphi(r)$, если существуют постоянные a и b , $0 < a < b$, такие, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} f(r) &< b\varphi(r), & r &> R, \\ f(r) &> a\varphi(r), & r &\in E, \end{aligned}$$

где E – некоторое неограниченное множество.

Если функция $f(r)$ является функцией нормального типа при порядке ρ , то, как следует из неравенств (2.2), функция $f(r)$ растёт на бесконечности как функция r^ρ .

Если функция $f(r)$ является функцией минимального или максимального типа при порядке ρ , то этой информации недостаточно, чтобы указать достаточно простую функцию $\varphi(r)$ такую, чтобы функция $f(r)$ росла на бесконечности как функция $\varphi(r)$.

В связи со сказанным выше естественно возникает следующая задача, назовём её задачей А. Необходимо указать класс функций \mathfrak{A} , состоящий из достаточно простых функций, по своим свойствам похожих на функции r^ρ и такой, чтобы для любой функции f конечного порядка в классе \mathfrak{A} нашлась бы такая функция $\varphi(r)$, чтобы функция $f(r)$ росла на бесконечности как функция $\varphi(r)$.

Как мы уже знаем, класс функций, состоящий из функций r^ρ , не является таким классом. Пусть $\ln_k r$ – k -тая итерация логарифма, например, $\ln_2 r = \ln \ln r$. Обозначим через e_k такую последовательность: $e_1 = e$, $e_{k+1} = e^{e_k}$. Можно проверить, что класс, состоящий из функций вида

$$\varphi(r) = r^\rho (\ln(r+e))^{\alpha_1} \dots (\ln_k(r+e_k))^{\alpha_k}, \quad (2.3)$$

где k – произвольное натуральное число, а $\rho, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ – произвольные вещественные числа, также не является таким классом. Видно, что сформулированная задача не является тривиальной. Путь к решению этой задачи указал Валирон [8].

Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$ на полуоси $(0, \infty)$ называется *уточнённым порядком* (в смысле Валирона), если выполняются два условия :

- 1) $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho(\infty) = \rho \in (-\infty, \infty)$,
- 2) $\lim_{r \rightarrow +\infty} r \ln r \rho'(r) = 0$.

Заметим, что под $\rho'(r)$ следует понимать максимальное по модулю производное число.

Мы будем использовать следующее обозначение $V(r) = r^{\rho(r)}$. Заметим, что $V(1) = 1$.

Отметим следующее свойство уточнённого порядка (смотри, например, [1] глава 1, §12).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\rho = \rho(\infty)$. Тогда для любого $t > 0$ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(tr)}{V(r)} = t^\rho,$$

и этот предел является равномерным на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Уточнённый порядок $\rho(r)$ называется уточнённым порядком функции $f(r)$, если выполняется соотношение

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{V(r)} = \sigma \in (0, \infty).$$

Выполнение этого соотношения эквивалентно утверждению, что функция $f(r)$ растёт на бесконечности как функция $V(r)$. Заметим также, что если $\rho(r)$ – уточнённый порядок функции $f(r)$, то число $\rho = \rho(\infty)$ является порядком функции $f(r)$.

Важность понятия уточнённого порядка следует из того, что класс \mathfrak{A} , составленный из функций вида $V(r) = r^{\rho(r)}$ является решением поставленной выше задачи А. Последнее вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $f(r)$ – функция конечного порядка ρ . Тогда существует уточнённый порядок $\rho(r)$ такой, что выполняются условия:

- 1) $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$,
- 2) функция $\rho(r)$ является монотонной функцией на полуоси $[1, \infty)$,
- 3) выполняется неравенство

$$(r + e) \ln(r + e) |\rho'(r)| \leq |\rho(r) - \rho|, \quad r \geq 1,$$

- 4) выполняется соотношение

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{V(r)} = \sigma \in (0, \infty).$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [9]. Правда, в [9] дополнительно требуется, чтобы функция $f(r)$ была непрерывной. Сейчас мы увидим, что это не существенное требование.

Пусть $f(r)$ – произвольная функция порядка ρ . Не ограничивая общности, можно считать, что функция $f(r)$ является ограниченной на любом сегменте $[0, N]$. Пусть $n \geq 0$ – произвольное целое число. Обозначим $m_n = \inf\{f(x) : x \in [n, n+1]\}$, $M_n = \sup\{f(x) : x \in [n, n+1]\}$, $\alpha_n = n + \frac{1}{3}$, $\beta_n = n + \frac{2}{3}$. Строим функцию $f_1(r)$ следующим образом. На каждом из сегментов $[n, \alpha_n]$, $[\alpha_n, \beta_n]$, $[\beta_n, n+1]$ она линейна и, кроме того, выполняются равенства $f_1(n) = f(n)$, $f_1(\alpha_n) = m_n$, $f_1(\beta_n) = M_n$. Функция $f_1(r)$ непрерывна на полуоси $[0, \infty)$. Очевидно, что любой уточнённый порядок функции $f_1(r)$ является также уточнённым порядком функции $f(r)$.

Отметим, что функция $\rho(r)$, существование которой утверждается в теореме 2.2, обладает некоторыми дополнительными свойствами, которых нет у произвольных уточнённых порядков. Это, во-первых, свойство монотонности функции $\rho(r)$, а во-вторых, условие 3) из текста теоремы – это более сильное ограничение на функцию $\rho(r)$, чем требование $\lim_{r \rightarrow +\infty} r \ln r \rho'(r) = 0$ из определения уточнённого порядка. Вследствие этого, теорема 2.2 не вытекает из аналогичных утверждений из [1], [2].

Отметим ещё связь уточнённого порядка с функциями регулярно меняющимися в смысле Караматы.

Положительная на полуоси $(0, \infty)$ функция $f(r)$ называется *регулярно меняющейся в смысле Караматы*, если для любого $\lambda > 0$ существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda r)}{f(r)}.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. *Если $f(r)$ – измеримая функция, регулярно меняющаяся в смысле Караматы, то существует функция $C(r) \rightarrow 1$ ($r \rightarrow \infty$) и уточнённый порядок $\rho(r)$ такие, что $f(r) = C(r)V(r)$.*

Это хорошо известная теорема о представлении для регулярно меняющихся функций (смотри, например, [2], теорема 1.3.1).

Уточнённый порядок $\rho(r)$ называется *нулевым уточнённым порядком*, если $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 0$.

Если $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, то $\rho(r) = \rho + \hat{\rho}(r)$, где $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$, а $\hat{\rho}(r)$ – нулевой уточнённый порядок.

Смысл введения уточнённого порядка состоит в том, чтобы для любой функции $f(r)$ конечного порядка найти функцию $V(r) = r^{\rho(r)}$ такую, чтобы функция $f(r)$ росла на бесконечности как функция $V(r)$. При решении такой задачи поведение функции $\rho(r)$ в окрестности нуля не играет никакой роли. Вместе с тем, при исследовании конкретных задач в различных областях математики часто возникают интегралы вида $\int_0^\infty K(t, r)V(t)dt$. При изучении свойств такого интеграла поведение функции $\rho(t)$ в окрестности нуля так же важно, как и поведение $\rho(t)$ в окрестности бесконечности. Поэтому в этой работе мы будем предполагать, что для нулевого уточнённого порядка $\rho(r)$ выполняется дополнительное условие $\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r)$.

Это равенство эквивалентно следующему $V\left(\frac{1}{r}\right) = V(r)$. Этому равенству, например, удовлетворяет функция $V(r) = 1 + |\ln r|^\alpha$, $\alpha > 1$. Соответствующий уточнённый порядок задаётся формулой

$$\rho(r) = \frac{\ln(1 + |\ln r|^\alpha)}{\ln r}.$$

Заметим, что при $\alpha \leq 1$ функция, задаваемая этим равенством, не будет уточнённым порядком, так как в определении уточнённого порядка требуется, чтобы функция $\rho(r)$ была абсолютно непрерывной на полуоси $(0, \infty)$.

Отметим ещё, что наличие равенства $\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r)$ выделяет точку 1 среди других точек полуоси $(0, \infty)$. В частности, из написанного равенства следует, что $\rho(1) = 0$.

При рассмотрении уточнённого порядка наряду с функцией $\rho(r)$ полезно использовать функцию $\eta(r) = \rho(r) + r \ln r \rho'(r)$. Выполняется равенство

$$V(r) = e^{\int_1^r \frac{\eta(t)}{t} dt}. \quad (2.4)$$

Справедливость этого равенства легко проверить с помощью логарифмирования и последующего дифференцирования.

Если $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, то $\eta(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Если, кроме того, $\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r)$, то $\eta\left(\frac{1}{r}\right) = -\eta(r)$ и в этом случае из формулы (2.4) легко следует, что для любого $\varepsilon > 0$ на полуоси $(0, \infty)$ выполняется неравенство

$$V(r) \leq M_\varepsilon(r^\varepsilon + r^{-\varepsilon}). \quad (2.5)$$

Это хотя и грубое неравенство, но в некоторых случаях оно оказывается полезным.

Если $\eta(t)$ – локально интегрируемая функция на полуоси $[1, \infty)$, имеющая нулевой предел на бесконечности, то существует бесконечно дифференцируемая на полуоси $[1, \infty)$ функция $\eta_1(t)$, имеющая нулевой предел на бесконечности и такая, что будет сходиться интеграл $\int_1^\infty \frac{|\eta(t) - \eta_1(t)|}{t} dt$. Дополнительно можно потребовать, чтобы выполнялось равенство $\int_1^\infty \frac{\eta(t) - \eta_1(t)}{t} dt = 0$. В этом случае для функции $V(r)$, определяемой формулой (2.4) будет справедливо равенство

$$V(r) = C(r)V_1(r),$$

где

$$V_1(r) = e^{\int_1^r \frac{\eta_1(t)}{t} dt}, \quad C(r) = e^{\int_r^\infty \frac{\eta_1(t) - \eta(t)}{t} dt}.$$

Из сказанного легко следует такая теорема.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $\rho(r)$ – произвольный нулевой уточнённый порядок такой, что выполняется равенство $\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r)$. Тогда выполняется равенство

$$V(r) = C(r)V_1(r), \quad (2.6)$$

где $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$, $\rho_1(r)$ – нулевой уточнённый порядок, бесконечно дифференцируемый на множестве $(0, \infty) \setminus \{1\}$, удовлетворяющий равенству $\rho_1\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho_1(r)$, а

$C(r)$ – непрерывная на полуоси $(0, \infty)$ функция такая, что $C(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$. Дополнительно можно задавать произвольно порядок малости функции $C(r) - 1$ при $r \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$.

Далее будет исследована функция $\gamma(t)$, о которой уже говорилось во вступлении. В следующей лемме приводятся легко доказываемые свойства функции $\gamma(t)$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию $\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r)$ и пусть

$$\gamma(t) = \gamma(\rho(\cdot), t) = \sup_{r>0} \frac{V(rt)}{V(r)}, \quad \underline{\gamma}(t) = \underline{\gamma}(\rho(\cdot), t) = \inf_{r>0} \frac{V(rt)}{V(r)}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\gamma(t), \underline{\gamma}(t) \in (0, \infty)$,
- 2) $\underline{\gamma}(t) \leq \gamma(t)$, $\underline{\gamma}(1) = \gamma(1) = 1$,
- 3) $\gamma\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\underline{\gamma}(t)}$, $\gamma\left(\frac{1}{t}\right) = \gamma\left(\rho(\cdot), \frac{1}{t}\right) = \gamma(-\rho(\cdot), t)$,
- 4) $\gamma(t_1 t_2) \leq \gamma(t_1) \gamma(t_2)$, $\underline{\gamma}(t_1 t_2) \geq \underline{\gamma}(t_1) \underline{\gamma}(t_2)$,
- 5) $\gamma(t) \geq V(t)$, $\underline{\gamma}(t) \leq V(t)$,
- 6) функции $\gamma(t)$ и $\underline{\gamma}(t)$ являются непрерывными функциями на полуоси $(0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 2) очевидно. Далее имеем

$$\gamma\left(\frac{1}{t}\right) = \sup_{r>0} \frac{V\left(\frac{r}{t}\right)}{V(r)} = \sup_{R>0} \frac{V(R)}{V(tR)} = \frac{1}{\inf_{R>0} \frac{V(tR)}{V(R)}} = \frac{1}{\underline{\gamma}(t)},$$

$$\gamma\left(\frac{1}{t}\right) = \sup_{R>0} \frac{V(R)}{V(tR)} = \sup_{R>0} \frac{R^{\rho(R)}}{(tR)^{\rho(tR)}} = \sup_{R>0} \frac{(tR)^{-\rho(tR)}}{R^{-\rho(R)}} = \gamma(-\rho(\cdot), t).$$

Тем самым утверждение 3) доказано.

Из равенства $V(1) = 1$ следует утверждение 5).

Так как $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(rt)}{V(r)} = 1$, $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(rt)}{V(r)} = 1$, то существуют числа r_1, r_2 , $0 < r_1 < r_2$ такие, что при $r \in (0, r_1) \cup (r_2, \infty)$ будет выполняться неравенство $\frac{V(rt)}{V(r)} \leq 2$. Так как функция $\frac{V(rt)}{V(r)}$ непрерывна при $r \in [r_1, r_2]$, то существует число $M > 0$ такое, что при $r \in [r_1, r_2]$ будет выполняться неравенство $\frac{V(rt)}{V(r)} \leq M$. Из этого следует, что $\gamma(t) \leq \max(M, 2)$. Вместе с неравенством $\gamma(t) \geq V(t)$ это даёт $\gamma(t) \in (0, \infty)$. Далее из 3) следует, что $\underline{\gamma}(t) \in (0, \infty)$. Тем самым утверждение 1) доказано.

Утверждение 4) очевидно.

Обозначим

$$\gamma(r, t) = \frac{V(tr)}{V(r)}.$$

Пусть $[a, b]$ – произвольный сегмент на полуоси $(0, \infty)$, ε – произвольное строго положительное число. Так как пределы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(rt)}{V(r)} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(rt)}{V(r)} = 1$$

по теореме 2.1 равномерные на сегменте $[a, b]$, то существуют числа r_3 и r_4 , $0 < r_3 < r_4$, такие, что при любых t_1 и $t_2 \in [a, b]$ при любых $r \in (0, r_3) \cup (r_4, \infty)$ будут выполняться неравенства

$$-\varepsilon \leq \gamma(r, t_2) - \gamma(r, t_1) \leq \varepsilon. \quad (2.7)$$

Так как функция $\gamma(r, t)$ непрерывна в прямоугольнике $[r_3, r_4] \times [a, b]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна в этом прямоугольнике. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что при $t_1, t_2 \in [a, b]$, $|t_1 - t_2| < \delta$, $r \in [r_3, r_4]$ будет выполняться неравенство (2.7). Вместе с ранее доказанным это даёт, что неравенства (2.7) будут выполняться для любых $t_1, t_2 \in [a, b]$, $|t_2 - t_1| < \delta$ и для любых $r > 0$.

Пусть $t_1, t_2 \in [a, b]$, $|t_2 - t_1| < \delta$. Для любого $r > 0$ выполняется неравенство

$$\gamma(t_2) - \gamma(t_1) \leq \gamma(t_2) - \gamma(r, t_1).$$

Существует $r > 0$ такое, что $\gamma(t_2) < \gamma(r, t_2) + \varepsilon$. Вместе с (2.7) это даёт $\gamma(t_2) - \gamma(t_1) < 2\varepsilon$. В этом неравенстве можно поменять местами t_1 и t_2 . Поэтому $|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| < 2\varepsilon$. Из этого следует непрерывность функции $\gamma(t)$ на сегменте $[a, b]$, а значит и на полуоси $(0, \infty)$. Утверждение 6), а вместе с ним и лемма, доказаны.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $\rho(r)$ – произвольный нулевой уточнённый порядок такой, что $\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r)$ и пусть

$$\gamma(t) = \sup_{r>0} \frac{V(tr)}{V(t)}. \quad (2.8)$$

Тогда выполняются равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \gamma(t)}{\ln t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \gamma\left(\frac{1}{t}\right)}{\ln t} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $V_1(r)$ определяется равенством (2.6). Справедливы неравенства

$$\frac{1}{M} \leq \frac{V_1(r)}{V(r)} \leq M.$$

Далее имеем

$$\gamma(t) = \sup_{r>0} \frac{V(rt)}{V(r)} = \sup_{r>0} \frac{V_1(rt)}{V_1(r)} \frac{V(rt)}{V_1(rt)} \frac{V_1(r)}{V(r)} \leq M^2 \sup_{r>0} \frac{V_1(rt)}{V_1(r)} = M^2 \gamma(\rho_1(\cdot), t).$$

Из этого следует, что теорему достаточно доказывать для случая, когда уточнённый порядок $\rho(r)$ является дифференцируемой функцией на множестве $(0, \infty) \setminus \{1\}$. В дальнейшем доказательстве будем считать, что это условие выполняется.

Обозначим $h(x) = \ln V(e^x)$. Функция $h(x)$ будет непрерывной чётной функцией дифференцируемой всюду за возможным исключением нуля. То, что $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, приводит к соотношению

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = 0. \quad (2.9)$$

Условие $\lim_{r \rightarrow \infty} r \ln r \rho'(r) = 0$, которое эквивалентно условию $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{rV'(r)}{V(r)} = 0$, приводит к соотношению

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = 0. \quad (2.10)$$

Выполняется равенство

$$\varphi(y) = \ln \gamma(e^y) = \sup_{x \in (-\infty, \infty)} (h(x+y) - h(x)).$$

Первое утверждение теоремы эквивалентно равенству

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(y)}{y} = 0. \quad (2.11)$$

Если это равенство не верно, то существуют число $a > 0$, последовательность $y_n \rightarrow +\infty$ и последовательность $x_n \in (-\infty, \infty)$ такие, что

$$|h(x_n + y_n) - h(x_n)| \geq ay_n. \quad (2.12)$$

Дополнительно можно считать, что существует элемент $\alpha \in [-\infty, \infty]$ такой, что $x_n \rightarrow \alpha$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть ε – произвольное число из интервала $(0, \frac{1}{2}a)$.

Допустим, что $\alpha \in (-\infty, \infty)$. Тогда для всех достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$|h(x_n + y_n) - h(x_n)| \leq \varepsilon(x_n + y_n) + |h(\alpha)| + 1 \leq \varepsilon y_n + \varepsilon(|\alpha| + 1) + |h(\alpha)| + 1.$$

Это неравенство противоречит неравенству (2.12).

Допустим, что $\alpha = +\infty$. Тогда существует число $\xi_n \in (x_n, x_n + y_n)$ такое, что выполняется равенство $h(x_n + y_n) - h(x_n) = h'(\xi_n)y_n$. Теперь из равенства (2.10) следует, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $|h(x_n + y_n) - h(x_n)| \leq \varepsilon y_n$. Это неравенство противоречит неравенству (2.12).

Теперь допустим, что $\alpha = -\infty$. Можно дополнительно предположить, что существует элемент $\beta \in [-\infty, \infty]$ такой, что $x_n + y_n \rightarrow \beta$ при $n \rightarrow \infty$.

Допустим, что $\beta \in (-\infty, \infty)$. Тогда для всех достаточно больших n будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} |h(x_n + y_n) - h(x_n)| &\leq |h(\beta)| + 1 + \varepsilon|x_n| \leq |h(\beta)| + 1 + \varepsilon|x_n + y_n| + \varepsilon y_n \\ &\leq |h(\beta)| + 1 + \varepsilon(|\beta| + 1) + \varepsilon y_n. \end{aligned}$$

Это неравенство противоречит неравенству (2.12).

Допустим, что $\beta = -\infty$. Тогда существует число $\xi_n \in (x_n, x_n + y_n)$ такое, что выполняется равенство $h(x_n + y_n) - h(x_n) = h'(\xi_n)y_n$. Теперь из равенства (2.10) и

чётности функции h следует, что для всех достаточно больших n будет выполняться неравенство $|h(x_n + y_n) - h(x_n)| \leq \varepsilon y_n$. Это неравенство противоречит неравенству (2.12).

Допустим теперь, что $\beta = +\infty$. Тогда для всех достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$|h(x_n + y_n) - h(x_n)| \leq \varepsilon(x_n + y_n) + \varepsilon|x_n| = \varepsilon y_n.$$

Это неравенство противоречит неравенству (2.12).

Полученные противоречия доказывают равенство (2.11), а значит и равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \gamma(t)}{\ln t} = 0. \quad (2.13)$$

Из этого равенства и утверждения 3) леммы 2.1 следует равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \gamma\left(\frac{1}{t}\right)}{\ln t} = 0. \quad (2.14)$$

Теорема доказана.

Пусть теперь $\rho(r)$ – уточнённый порядок, представимый в виде $\rho(r) = \rho + \hat{\rho}(r)$, где $\hat{\rho}(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию $\hat{\rho}\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho\left(\frac{1}{r}\right)$. В этом случае при $r > 0$ и $t > 0$ выполняется неравенство

$$V(rt) \leq t^\rho \gamma(t) V(r), \quad (2.15)$$

где непрерывная функция $\gamma(t)$ удовлетворяет соотношениям (2.13), (2.14). Как уже отмечалось во вступлении, утверждение о справедливости этого неравенства является некоторым усилением результата Поттера [3] и значительным упрощением его формулировки. Результат Поттера цитируется и используется в [2]. Неравенство (2.15) довольно часто используется в представленной работе. Полезность этого неравенства можно также увидеть, анализируя доказательство следующей леммы.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\rho(r)$ – произвольный нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию $\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r)$ и пусть

$$V_1(r) = \frac{2r}{\pi} \int_0^\infty \frac{V(t)}{t^2 + r^2} dt.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) функция $V_1(r)$ допускает голоморфное продолжение с полуси $(0, \infty)$ в полуплоскость $\Re z > 0$,
- 2) $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$, где $\rho_1(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию $\rho_1\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho_1(r)$,
- 3) выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_1(r)}{V(r)} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что функция

$$V_1(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(t)}{t^2 + z^2} dt$$

является голоморфной в полуплоскости $\Re z > 0$, легко доказать, исходя из неравенства $V(t) \leq M(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})$ (смотри неравенство (2.5)). Таким способом обосновывается утверждение 1) леммы.

Разбивая полуось $[0, \infty)$ на части $[0, \varepsilon]$, $[\varepsilon r, Nr]$, $[Nr, \infty)$, представим $V_1(r)$ в виде суммы трёх интегралов

$$V_1(r) = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r).$$

Имеем

$$\frac{I_2(r)}{V(r)} = \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^N \frac{V(ur)}{V(r)} \frac{du}{u^2 + 1}.$$

Из теоремы 2.1 следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{I_2(r)}{V(r)} = \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^N \frac{du}{u^2 + 1}. \quad (2.16)$$

Далее находим, что

$$I_1(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{V(ur)}{u^2 + 1} du \leq \frac{2V(r)}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\gamma(u)}{u^2 + 1} du.$$

Отсюда следует неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{I_1(r)}{V(r)} \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\gamma(u)}{u^2 + 1} du. \quad (2.17)$$

Аналогично получаем, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{I_3(r)}{V(r)} \leq \frac{2}{\pi} \int_N^{\infty} \frac{\gamma(u)}{u^2 + 1} du. \quad (2.18)$$

Из соотношений (2.16)-(2.18) следует

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{V_1(r)}{V(r)} - 1 \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\gamma(u)}{u^2 + 1} du + 1 - \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^N \frac{du}{u^2 + 1} + \frac{2}{\pi} \int_N^{\infty} \frac{\gamma(u)}{u^2 + 1} du.$$

Из этого неравенства предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ получаем утверждение 3) леммы.

Если функцию $\rho_1(r)$ определить равенством $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$, то из утверждения 3) следует равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = 0. \quad (2.19)$$

Далее имеем

$$rV_1'(r) = \frac{2r}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2 - r^2}{(t^2 + r^2)^2} V(t) dt.$$

Повторяя рассуждения, обосновывающие утверждение 3), получим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{rV_1'(r)}{V(r)} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \frac{t}{t^2 + 1} dt = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{rV_1'(r)}{V_1(r)} = 0. \quad (2.20)$$

Из равенств (2.19), (2.20), следует, что функция $\rho_1(r)$ является нулевым уточнённым порядком.

Далее находим

$$V_1\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{\pi r} \int_0^\infty \frac{V(t)}{t^2 + \frac{1}{r^2}} dt = \frac{2}{\pi r} \int_0^\infty \frac{V\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{r^2}} \frac{du}{u^2} = \frac{2r}{\pi} \int_0^\infty \frac{V(u)}{u^2 + r^2} du = V_1(r).$$

Из этого следует, что $\rho_1\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho_1(r)$. Утверждение 2), а вместе с ним и лемма, доказаны.

Из леммы 2.2, в частности, следует, что при решении задачи А, сформулированной в начале раздела, в качестве класса \mathfrak{A} можно взять не множество функций вида $V(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, а значительно более узкий класс, состоящий из тех функций $V(r)$, для которых функция $\rho(r)$ является аналитической функцией на полуоси $(0, \infty)$, и представляется в виде $\rho(r) = \rho + \hat{\rho}(r)$, где $\hat{\rho}(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий условию $\hat{\rho}\left(\frac{1}{r}\right) = -\hat{\rho}(r)$.

В теореме 2.5 относительно функции $\gamma(t)$ утверждается, что для неё справедливы равенства (2.13), (2.14). Для достаточно широкого класса функций вида $V(r) = r^{\rho(r)}$ справедливы более точные оценки. В лемме 2.1 утверждается, что $\gamma(t) \geq V(t)$. В следующей теореме приводится достаточно широкий класс уточнённых порядков таких, что для функций $\gamma(t)$ определённых с помощью этих уточнённых порядков при $t \geq 1$ выполняется неравенство $\gamma(t) \leq MV(t)$ с некоторой постоянной M .

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, дважды дифференцируемый на множестве $(0, \infty) \setminus \{1\}$ и удовлетворяющий условию $\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r)$. Пусть $V(r) = r^{\rho(r)}$, $V(r) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$), и функция $h(x) = \ln V(e^x)$ является вогнутой в некоторой окрестности бесконечности. Пусть функция $\gamma(t)$ определяется равенством (2.8). Тогда существует постоянная M такая, что при $t \geq 1$ выполняется неравенство $\gamma(t) \leq MV(t)$. Если функция $h(x)$ вогнута на полуоси $(0, \infty)$, то $\gamma(t) = V(t)$ при $t \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $a(x) = h(x) - xh'(x)$. Имеем $a'(x) = -xh''(x)$. В силу условий теоремы функция $a(x)$ является возрастающей в некоторой окрестности бесконечности. При $x \geq 1$ выполняется равенство

$$h(x) = -x \left(\int_1^x \frac{a(t)}{t^2} dt + c \right), \quad c = -h(1). \quad (2.21)$$

Докажем, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{a(t)}{t^2} dt \quad (2.22)$$

является сходящимся. В противном случае, если в окрестности бесконечности выполняется неравенство $a(t) \leq 0$, то получим противоречие с равенством (2.9), а в случае, если $a(t) \geq 0$ в некоторой окрестности бесконечности, то получим противоречие с соотношением $V(r) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) из условия теоремы. Тем самым сходимость интеграла (2.22) доказана. Теперь равенство (2.21) можно переписать в виде

$$h(x) = x \int_x^\infty \frac{a(t)}{t^2} dt. \quad (2.23)$$

В силу равенства (2.9) дополнительное слагаемое c_1x в правой части этого равенства, которое появляется при переходе от (2.21) к (2.23) отсутствует.

Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = +\infty. \quad (2.24)$$

В противном случае функция $h(x)$, а вместе с ней и функция $V(r)$, были бы ограничены в некоторой окрестности $+\infty$, а это противоречит условиям теоремы. Тем самым равенство (2.24) доказано.

Пусть число $x_0 > 0$ таково, что функция $h(x)$ является вогнутой при $x \geq x_0$. Уравнение касательной к кривой $y = h(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$Y(x) = h(x_0) - x_0h'(x_0) + h'(x_0)x.$$

Если x_0 достаточно велико, то тогда будет выполняться неравенство $Y(0) > 0$. В этом случае существует функция $h_1(x)$, обладающая свойствами:

- 1) $h_1(x)$ – чётная функция непрерывная на оси $(-\infty, \infty)$ вогнутая и дифференцируемая на полуоси $(0, \infty)$,
- 2) $h_1(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, $h_1(0) = 0$,
- 3) $h_1(x) = h(x)$ при $x \geq x_0$.

Из сформулированных свойств функции $h_1(x)$ следуют ещё такие свойства:

- 4) существует постоянная M_1 такая, что на всей вещественной оси выполняется неравенство $|h(x) - h_1(x)| \leq M_1$,
- 5) функция $h_1(x)$ является возрастающей функцией на полуоси $[0, \infty)$,
- 6) при $x \geq 0$, $y \geq 0$, выполняется неравенство $h_1(x+y) \leq h_1(x) + h_1(y)$.

Далее находим при $y > 0$

$$\ln \gamma(e^y) = \sup_{x \in (-\infty, \infty)} (h(x+y) - h(x)) \leq 2M_1 + \sup_{x \in (-\infty, \infty)} (h_1(x+y) - h_1(x))$$

$$\begin{aligned}
&= 2M_1 + \sup_{x \in (-\infty, \infty)} (h_1(|x+y|) - h_1(|x|)) \leq 2M_1 + \sup_{x \in (-\infty, \infty)} (h_1(|x|+y) - h_1(|x|)) \\
&\leq 2M_1 + h_1(y) \leq 3M_1 + h(y) = 3M_1 + \ln V(e^y).
\end{aligned}$$

Из этого следует, что при $t > 1$ выполняется неравенство $\gamma(t) \leq e^{3M_1} V(t)$. В случае, если функция $h(x)$ вогнута на полуоси $[0, \infty)$, то тогда $h_1(x) = h(x)$, $M_1 = 0$, $\gamma(t) \leq V(t)$. Вместе с неравенством $\gamma(t) \geq V(t)$ это даёт $\gamma(t) = V(t)$. Теорема доказана.

Во многих вопросах основную роль играет не уточнённый порядок $\rho(r)$, а функция $V(r) = r^{\rho(r)}$. Иногда важны свойства функции $V(r)$ не только в окрестности бесконечности, но и в окрестности нуля, например, при исследовании свойств интеграла $\int_0^\infty K(t, r) V(t) dt$. Поэтому, как уже было сказано, в дальнейшем мы предполагаем, что нулевой уточнённый порядок удовлетворяет условию $\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r)$. Это эквивалентно соотношению $V\left(\frac{1}{r}\right) = V(r)$. Из теоремы 2.4 следует, что требование дифференцируемости функции $\rho(r)$ на множестве $(0, \infty) \setminus \{1\}$ во многих случаях не является существенным ограничением. Равенство

$$\rho(r) = \frac{\ln V(r)}{\ln r}$$

показывает, что требование дифференцируемости функции $\rho(r)$ в точке 1 достаточно стеснительно. Это требование исключает из рассмотрения функции $\rho(r) = \frac{A|\ln r|^\alpha}{\ln r}$, $\alpha \in (0, 1)$, для которых функция $V(r)$ имеет вид $V(r) = \exp(A|\ln r|^\alpha)$. Ввиду простоты этих функций их часто используют в качестве функций сравнения. Для таких функций также справедлива формула $\gamma(t) = V(t)$ при $t \geq 1$.

Конечно, из леммы 2.2 следует, что требование существования производной $\rho'(1)$ также не является существенным. Для этого нужно заменить функцию $V(r)$ на функцию $V_1(r)$. Однако использование функции $V_1(r)$ несколько затрудняется достаточной сложностью этой функции.

В дальнейшем тексте статьи под *нулевым уточнённым порядком* понимается функция $\rho(r)$, которая удовлетворяет условиям:

- 1) $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 0$,
- 2) $\rho\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho(r)$,
- 3) функция $\rho(r)$ является непрерывно дифференцируемой на множестве $(0, \infty) \setminus \{1\}$,
- 4) $\lim_{r \rightarrow \infty} r \ln r \rho'(r) = 0$,
- 5) функция $V(r) = r^{\rho(r)}$ непрерывно продолжается в точку 1, причём $V(1) = 1$ (сама функция $\rho(r)$ в точке 1 может и не быть определённой).

Другие уточнённые порядки $\rho(r)$ имеют вид $\rho(r) = \rho + \hat{\rho}(r)$, где $\hat{\rho}(r)$ – нулевой уточнённый порядок, удовлетворяющий написанным выше условиям.

3 Меры, предельные множества мер

В этом разделе будет изложена теория предельных множеств радоновых мер конечного порядка на полуоси $(0, \infty)$. Для удобства читателей будут приведены определения используемых терминов и формулировки используемых результатов.

Доказательства приведенных без доказательства утверждений можно найти в [10], [11], [12].

Мы начнём со сведений относящихся к "абстрактной" теории меры.

Измеримое пространство с вещественной мерой μ – это тройка (X, \mathcal{A}, μ) , где X – множество, \mathcal{A} – сигма-алгебра подмножеств множества X , μ – функция, определённая на множествах E , входящих в сигма-алгебру \mathcal{A} , принимающая значения из расширенной числовой прямой $[-\infty, \infty]$ и обладающая свойством счётной аддитивности: $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$, где $E_k \in \mathcal{A}$ и множества E_k образуют дизъюнктивную последовательность множеств ($E_k \cap E_j = \emptyset$, если $k \neq j$).

Мера μ называется *положительной*, если $\mu(E) \geq 0$ для любого $E \in \mathcal{A}$.

Положительная мера называется *конечной*, если $\mu(X) < \infty$.

Пусть $A \in \mathcal{A}$. *Ограничением меры* μ на множество A (обозначение μ_A) называется мера, определяемая равенством $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$.

Говорят, что мера μ *сосредоточена на множестве* A , если $\mu_A = \mu$.

Пусть μ_1 и μ_2 две меры, определённые на одной сигма-алгебре \mathcal{A} . Такие меры называются *взаимно сингулярными*, если они сосредоточены на непересекающихся множествах A_1 и A_2 . Теорема Хана утверждает, что если μ – вещественная мера, то существуют множества A_1 и A_2 из алгебры \mathcal{A} такие, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $X = A_1 \cup A_2$, ограничение μ_{A_1} – положительная мера, а ограничение μ_{A_2} – отрицательная мера.

Соответствующая пара множеств A_1, A_2 называется *разложением Хана* для меры μ . Мера $\mu_+ = \mu_{A_1}$ называется *положительной составляющей* меры μ , мера $\mu_- = -\mu_{A_2}$ называется *отрицательной составляющей* меры μ . Таким образом, любая вещественная мера μ есть разность $\mu = \mu_+ - \mu_-$ двух взаимно сингулярных положительных мер.

Представление меры $\mu = \mu_+ - \mu_-$ в виде разности двух взаимно сингулярных положительных мер называется *разложением Жордана* меры μ .

Хотя разложение Хана $X = A_1 \cup A_2$ неоднозначно, разложение Жордана $\mu = \mu_+ - \mu_-$ однозначно. Меры μ_+ и μ_- однозначно определяются мерой μ .

Если $\mu = \mu_+ - \mu_-$ есть разложение Жордана меры μ , то хотя бы одна из мер μ_+ , μ_- является конечной, иначе равенство $\mu(X) = \mu_+(X) - \mu_-(X)$ не имело бы смысла.

Мера $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ называется *модулем* или *полной вариацией* меры μ .

Важным является случай, когда X – топологическое пространство, а соответствующая сигма-алгебра является сигма-алгеброй \mathfrak{B} борелевских множеств пространства X . В этом случае мера μ называется *борелевской* мерой.

Пусть $X = K$ – компакт. Тогда множество конечных вещественных борелевских мер на K образуют банахово пространство. Это пространство можно отождествить с пространством сопряжённым к банаховому пространству $C(K)$ – пространству непрерывных вещественных функций f на K с нормой $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$. Это следует из теоремы Рисса, которая утверждает, что всякий линейный непрерывный функционал T в пространстве $C(K)$ имеет вид

$$(T, f) = \int_K f(x) d\mu(x),$$

где μ – некоторая конечная борелевская мера на K .

Далее вместо (T, f) мы будем писать (μ, f) . Имеет место равенство $\|\mu\| = |\mu|(K)$ ($\|\mu\|$ – это норма линейного функционала μ , $\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leq 1} (\mu, f)$).

Банахово пространство конечных вещественных борелевских мер на компакте K мы обозначим $\mathcal{M}_r(K)$. В пространстве $\mathcal{M}_r(K)$ более важную роль, чем сходимость по норме, играет слабая сходимость. Согласно общепринятой терминологии последовательность μ_n слабо сходится к μ (обозначение $\mu = W \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$), если для любой функции $f \in C(K)$ числовая последовательность (μ_n, f) сходится к (μ, f) .

Из теоремы Алаоглу следует, что если $H \subset \mathcal{M}_r(K)$ и $\sup\{|\mu|(K) : \mu \in H\} < \infty$, то у любой последовательности $\mu_n \in H$ есть слабо сходящаяся подпоследовательность.

Наряду с вещественным банаховым пространством $\mathcal{M}_r(K)$ рассматривается комплексное банахово пространство $\mathcal{M}_c(K)$, состоящее из комплексных борелевских мер $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1 и μ_2 – конечные вещественные борелевские меры. Пространство $\mathcal{M}_c(K)$ можно отождествить с пространством сопряжённым банахову пространству $C(K)$, состоящему из непрерывных комплексных функций f на K , причём $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$. В пространстве $\mathcal{M}_c(K)$ также выполняется равенство $\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |(\mu, f)| = |\mu|(K)$.

В комплексном случае мера $|\mu|$ определяется сложнее, но справедливы следующие простые неравенства. Если $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, то $|\mu_1| \leq |\mu|$, $|\mu_2| \leq |\mu|$, $|\mu| \leq |\mu_1| + |\mu_2|$.

Теперь мы переходим к рассмотрению основного объекта нашего исследования – пространству радоновых мер на полуоси $(0, \infty)$.

Вначале определим пространство тестовых функций Φ на полуоси $(0, \infty)$ (мы позаимствовали термин из теории обобщённых функций, а обозначение – из книги Ландкофа [12]). Функция $f \in \Phi$, если f – непрерывная функция на полуоси $(0, \infty)$ и существует такой сегмент $[a, b]$, что выполняется соотношение $\text{supp } f \subset [a, b] \subset (0, \infty)$. Мы будем рассматривать как вещественные, так и комплексные пространства Φ .

В пространстве Φ известным способом вводится понятие сходимости. Последовательность функций f_n сходится к функции f в пространстве Φ , если существует сегмент $[a, b] \subset (0, \infty)$ такой, что для любого n $\text{supp } f_n \subset [a, b]$ и последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на полуоси $(0, \infty)$.

Для функций $f \in \Phi$ мы будем использовать обозначение $\|f\| = \max |f(x)|$.

Борелевская мера μ на полуоси $(0, \infty)$ называется локально конечной, если для любого сегмента $[a, b] \subset (0, \infty)$ выполняется неравенство $|\mu|([a, b]) < \infty$.

Функция множеств μ называется вещественной радоновой мерой на полуоси $(0, \infty)$, если она представима в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1, μ_2 – взаимно сингулярные локально конечные положительные борелевские меры на полуоси $(0, \infty)$.

Для любого борелевского множества $A \subset (0, \infty)$ равенством $\mu_A = (\mu_1)_A - (\mu_2)_A$ определяется ограничение μ на множество A . Хотя введённая функция множеств μ не является борелевской мерой на полуоси $(0, \infty)$ (она не определена на тех борелевских множествах E , для которых выполняется одно из соотношений $\mu_1(E) = \mu_2(E) = +\infty$, $\mu_1(E) = \mu_2(E) = -\infty$), тем не менее, ограничение $\mu_{[a, b]}$ для любого сегмента $[a, b] \subset (0, \infty)$ является конечной борелевской мерой.

Тем самым для любой функции $f \in \Phi$ имеет смысл $(\mu, f) = \int_0^\infty f(x) d\mu(x)$. Очевид-

но, что так определённая функция (μ, f) является линейным функционалом на пространстве Φ . Очевидно также, что этот функционал непрерывен на Φ , то есть из сходимости f_n к f в пространстве Φ следует, что $(\mu, f_n) \rightarrow (\mu, f)$.

Известно и обратное. Если T – непрерывный линейный функционал на пространстве Φ , то существует радонова мера μ такая, что $(T, f) = (\mu, f)$ для любой функции $f \in \Phi$. Известно также, что существует единственная радонова мера μ , обладающая этим свойством.

Бурбаки первоначально определяет *радоновы* меры в произвольном локально компактном топологическом пространстве как непрерывные линейные функционалы на пространстве непрерывных функций f с компактным носителем. Функционал T называется *положительным*, если $(T, f) \geq 0$ при $f \geq 0$. Он доказывает, что всякий непрерывный линейный положительный функционал совпадает с положительной локально конечной борелевской мерой на топологическом пространстве. Затем он доказывает, что любой непрерывный линейный функционал представляется в виде разности положительных линейных непрерывных функционалов.

Таким образом, в случае, когда локально компактное топологическое пространство есть полуось $(0, \infty)$, предложенное в статье определение радоновой меры эквивалентно определению Бурбаки.

Множество вещественных радоновых мер на полуоси $(0, \infty)$ образует вещественное линейное пространство. Мы будем обозначать его через \mathfrak{R} .

Мы будем также рассматривать линейное комплексное пространство \mathfrak{R}_c , состоящее из комплексных радоновых мер $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1 и μ_2 – вещественные радоновы меры.

В пространствах \mathfrak{R} , \mathfrak{R}_c вводится понятие широкой сходимости. Этот термин принадлежит Бурбаки. Последовательность радоновых мер μ_n *широко сходится* к радоновой мере μ (обозначение $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ или $\mu_n \rightarrow \mu$), если для любой функции $f \in \Phi$ числовая последовательность (μ_n, f) сходится к (μ, f) . Термин широкая сходимость занимает в нашей статье привелигированное положение. Если пишется $\mu_n \rightarrow \mu$ и не уточняется, о каком виде сходимости идёт речь, то имеется в виду широкая сходимость. В представленной статье рассматриваются различные виды сходимости последовательностей мер μ_n .

Множество E называется *измеримым по Жордану* относительно радоновой меры μ , если $|\mu|(\partial E) = 0$.

Хорошо известны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mu_n \rightarrow \mu$, $|\mu_n| \rightarrow \hat{\mu}$. Если множество E измеримо по Жордану относительно меры $\hat{\mu}$, то $(\mu_n)_E \rightarrow \mu_E$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mu_n \rightarrow \mu$, $|\mu_n| \rightarrow \hat{\mu}$. Пусть $K \subset (0, \infty)$ – компакт измеримый по Жордану относительно меры $\hat{\mu}$. Тогда последовательность $(\mu_n)_K$ слабо сходится к μ_K .

Для последовательности положительных мер μ_n доказательства сформулированных утверждений можно найти в [12], введение, §1. В общем случае нужно применять эти утверждения отдельно к мерам $(\mu_n)_+$ и $(\mu_n)_-$. Нам будет нужна следующая теорема, которую можно получить как следствие теоремы 3.1.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть последовательность μ_n радоновых мер на полуоси $(0, \infty)$ широко сходится к радоновой мере ν . Пусть, кроме того, $|\mu_n| \rightarrow \hat{\nu}$ и $\hat{\nu}(\{\xi\}) = 0$. Тогда для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняются равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi(t) \chi_{(0, \xi]}(t) d\mu_n(t) = \int_0^{\infty} \varphi(t) \chi_{(0, \xi]}(t) d\nu(t),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi(t) \chi_{(\xi, \infty)}(t) d\mu_n(t) = \int_0^{\infty} \varphi(t) \chi_{(\xi, \infty)}(t) d\nu(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в теореме 3.1 в качестве множества E выбирать множества $(0, \xi]$, (ξ, ∞) , то получим утверждения теоремы. Теорема доказана.

Множество $H \subset \mathfrak{R}_c(\mathfrak{R})$ называется *широко ограниченным*, если для любой функции $\varphi \in \Phi$ множество $\{(\mu, f) : \mu \in H\}$ является ограниченным.

Множество H называется *сильно ограниченным*, если для любого сегмента $[a, b] \subset (0, \infty)$ множество $\{|\mu|([a, b]) : \mu \in H\}$ является ограниченным.

Множество H называется *компактным*, если из любой последовательности $\mu_n \in H$ можно выделить широко сходящуюся подпоследовательность.

Следующее утверждение – это главный результат из теории меры, который мы применяем в нашей работе.

ТЕОРЕМА 3.4. Классы широко ограниченных, сильно ограниченных и компактных множеств в пространстве \mathfrak{R} (\mathfrak{R}_c) совпадают.

Доказательство можно найти в [10], глава 3, §1, предложение 15 и примечание к нему.

Заметим, что лёгким следствием сформулированной теоремы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.5. Отображение $(\mu, \varphi) : \mathfrak{R}_c \times \Phi \rightarrow \mathbb{C}$ является непрерывным по совокупности переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu_n \rightarrow \mu$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Поскольку $\varphi_n \rightarrow \varphi$, то существует сегмент $[a, b] \subset (0, \infty)$ такой, что $\text{supp } \varphi_n \subset [a, b]$, $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$. Поскольку $\mu_n \rightarrow \mu$, то последовательность μ_n является широко ограниченной, а значит и сильно ограниченной. Поэтому существует постоянная M такая, что выполняются неравенства $|\mu_n|([a, b]) \leq M$. Далее имеем

$$|(\mu_n, \varphi_n) - (\mu, \varphi)| \leq |\mu_n|([a, b]) \|\varphi_n - \varphi\| + |((\mu - \mu_n), \varphi)| \leq M \|\varphi_n - \varphi\| + |(\mu_n - \mu), \varphi|.$$

Из этого следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.6. Для того, чтобы последовательность положительных радоновых мер μ_n широко сходилась к радоновой мере μ , достаточно, чтобы соотношение $(\mu_n, f) \rightarrow (\mu, f)$ выполнялось на всюду плотном множестве в пространстве Φ .

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть радоновые меры μ и ν таковы, что равенство $(\mu, f) = (\nu, f)$ выполняется на всюду плотном множестве в пространстве Φ . Тогда $\mu = \nu$.

Доказательства теорем 3.6 и 3.7 можно найти в [12], введение, §1.

Обычно мы будем использовать широкую сходимость радоновых мер. Между тем, часто рассуждения удобнее проводить в метрических пространствах. Поэтому мы будем использовать в пространстве \mathfrak{R}_c следующие известные метрики. Пусть $\{\varphi_n : n = 1, 2, \dots\}$ – счётное всюду плотное множество в пространстве Φ . Это означает, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует подпоследовательность φ_{n_k} последовательности φ_n такая, что $\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi$ в пространстве Φ . Далее по последовательности φ_n определяем функцию

$$d(\mu_1, \mu_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\mu_1 - \mu_2)(\varphi_n)|}{2^n(1 + |(\mu_1 - \mu_2)(\varphi_n)|)}, \quad (3.1)$$

$\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{R}_c$. Легко проверяется что d – метрика в пространстве \mathfrak{R}_c .

Более того, легко видеть, что из соотношения $\mu_k \rightarrow \mu$ следует, что $d(\mu_k, \mu) \rightarrow 0$. Однако, обратное утверждение неверно. Пусть, например, все функции φ_n непрерывно дифференцируемы, а

$$\begin{aligned} \mu_k &= k \left(\delta \left(x - 1 - \frac{1}{2k} \right) - \delta \left(x - 1 + \frac{1}{2k} \right) \right) \\ &- \sqrt{2}k \left(\delta \left(x - 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}k} \right) - \delta \left(x - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}k} \right) \right), \end{aligned}$$

где $\delta(x-a)$ – мера Дирака, сосредоточенная в точке a . Тогда $d(\mu_k, 0) \rightarrow 0$, в то время как соотношение $\mu_k \rightarrow 0$ не выполняется. Однако, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.8. *Если μ_k – компактная последовательность в \mathfrak{R}_c и $d(\mu_k, \mu) \rightarrow 0$, то μ_k широко сходится к μ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если утверждение теоремы неверно, то существует функция $\varphi \in \Phi$ и две подпоследовательности $\mu_{k_p^1}, \mu_{k_p^2}$ последовательности μ_k такие, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\mu_{k_p^1}, \varphi) \neq \lim_{p \rightarrow \infty} (\mu_{k_p^2}, \varphi).$$

Пусть $\nu_p = \mu_{k_p^1} - \mu_{k_p^2}$, а φ_n – та последовательность функций из Φ , которая определяет метрику d . Поскольку φ_n всюду плотная последовательность в Φ , то существует подпоследовательность ψ_n последовательности φ_n , которая сходится к φ в пространстве Φ . Существует сегмент $[a, b]$ на полуоси $(0, \infty)$, такой что $\text{supp } \psi_n \subset [a, b]$ для любого n . Поэтому с некоторой константой M , не зависящей от n , выполняется неравенство $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} |\nu_p(\varphi)| \leq M \|\varphi - \psi_n\|$. Из этого следует, что $\nu_p(\varphi) \rightarrow 0$. Это противоречит выбору φ . Теорема доказана.

Таким образом, в общем случае сходимость в метрике d слабее широкой сходимости в \mathfrak{R}_c , в то время как на компактных множествах оба вида сходимости эквивалентны. Метрика d определяется счётной всюду плотной последовательностью φ_n . Следовательно существует бесконечное число метрик такого типа. В общем случае из сходимости последовательности μ_n в одной метрике не следует сходимость в другой метрике. Однако на компактных множествах сходимость последовательности μ_n

в одной из метрик влечёт широкую сходимость этой последовательности и, значит, сходимость μ_n в любой метрике рассматриваемого типа.

Далее для мер $\mu \in \mathfrak{R}_c$ мы будем рассматривать интегралы $\int_0^\infty f(x)d\mu(x)$ не только для функций $f \in \Phi$. В связи с этим отметим следующее. Если $f \in \Phi$, то написанный интеграл можно рассматривать как интеграл Римана-Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $\mu(x)$, где $\mu(x)$ – функция распределения меры μ . Однако, нам придётся иметь дело со случаем, когда f – произвольная борелевская функция на полуоси $(0, \infty)$. Вначале предположим, что $\text{supp } f \subset [a, b] \subset (0, \infty)$. Ограничение μ на сегмент $[a, b]$ есть конечная борелевская мера. В этом случае $\int_a^b f(x)d\mu(x)$ рассматривается как интеграл Лебега функции f по мере μ . Конечно, не всякая такая функция является интегрируемой по мере μ .

Предположим теперь, что $f(x)$ – произвольная борелевская функция на полуоси $(0, \infty)$, которая является локально интегрируемой по мере μ . В этом случае полагаем

$$\int_0^\infty f(x)d\mu(x) = \lim_{\substack{a \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x)d\mu(x).$$

Это означает, что мы рассматриваем интеграл $\int_0^\infty f(x)d\mu(x)$ как несобственный интеграл с особыми точками ноль и бесконечность. Для некоторых функций f такой интеграл сходится.

Пусть $\rho(t)$ – произвольный уточнённый порядок. На пространстве \mathfrak{R}_c определим *однопараметрическое семейство преобразований Азарина* $A_t : \mathfrak{R}_c \rightarrow \mathfrak{R}_c$, $t \in (0, \infty)$, согласно формулам

$$\mu_t = A_t \mu, \quad \mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)}.$$

Если мера μ имеет своей функцией распределения $\mu(x)$, то функция распределения меры μ_t будет $\frac{1}{V(t)}\mu(tx)$.

Пусть $f \in \Phi$. Формула замены переменных даёт

$$\int_E f(x)d\mu_t(x) = \frac{1}{V(t)} \int_{tE} f\left(\frac{y}{t}\right) d\mu(y),$$

и, в частности,

$$\int_0^\infty f(x)d\mu_t(x) = \frac{1}{V(t)} \int_0^\infty f\left(\frac{y}{t}\right) d\mu(y). \quad (3.2)$$

Из формулы (3.2) и теоремы 3.5 легко следует, что функция $\mu_t : \mathfrak{R}_c \times (0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}_c$ непрерывна по совокупности переменных, то есть, если $t_n \rightarrow \tau$, $\mu_n \rightarrow \mu$, то $(\mu_n)_{t_n} \rightarrow \mu_\tau$.

Классические *динамические системы* в метрическом пространстве X определяются [13] как однопараметрические семейства отображений $B_t : X \rightarrow X$, $t \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющие условиям:

1) $B_0 x = x$ (начальное условие);

- 2) отображение $B_t : X \times (-\infty, \infty) \rightarrow X$ непрерывно по совокупности переменных (условие непрерывности);
 3) $B_{t_1} B_{t_2} = B_{t_1+t_2}$ (условие группы).

В случае $\rho(r) \equiv \rho$ система Азарина A_t является динамической системой в пространстве \mathfrak{R}_c , где сходимостъ понимается как широкая сходимостъ, аддитивная группа вещественных чисел заменяется на мультипликативную группу строго положительных чисел, причём начальное условие выглядит так: $A_1\mu = \mu$, а условие группы принимает вид $A_{t_1} A_{t_2}\mu = A_{t_1+t_2}\mu$.

Систему $A_t\mu$ для положительных борелевских мер μ в пространстве \mathbb{R}^m ввёл и с успехом применял в теории субгармонических функций Азарин ([4], [14]).

В классической теории динамических систем множество

$$\{y \in X : y = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{t_n} x, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty\}$$

называется ω -предельным множеством траектории $B_t x$.

Систему $A_t\mu$ мы, избегая усложнения в терминологии, также будем называть динамической системой Азарина даже в случае произвольного уточнённого порядка. Множество

$$\{\nu \in \mathfrak{R}_c : \nu = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{t_n}\mu, \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty\}$$

мы будем называть предельным множеством Азарина для меры μ и обозначать, следуя Азарину, $Fr[\mu]$. При отсутствии связи между мерой μ и уточнённым порядком $\rho(r)$ нельзя что-либо сказать о свойствах множества $Fr[\mu]$. Поэтому мы будем предполагать, что выполняется соотношение $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Определение множества $\mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$ дано во введении. Из локальной конечности радоновой меры следует, что соотношение $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$ эквивалентно соотношению

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mu|([r, er])}{V(r)} < \infty.$$

Если $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, то как мы увидим дальше, множество $Fr[\mu]$ обладает свойствами, аналогичными свойствам предельных множеств в теории динамических систем.

Из соотношения $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$ легко следует, что положительная полутраектория μ_t (множество $\{\mu_t : t \in [1, \infty)\}$) является компактным множеством. Сформулируем это утверждение в виде отдельной леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Тогда полутраектория μ_t , $t \geq 1$, есть компактное множество радоновых мер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < a < b < \infty$. Используя формулы (2.8) и (2.15), получаем оценку

$$|\mu_t|([a, b]) = \frac{|\mu|([at, bt])}{V(at)} \frac{V(at)}{V(t)} \leq \gamma(a) a^\rho \frac{|\mu|([at, \frac{b}{a}at])}{V(at)} \leq M(a, b).$$

Последнее неравенство следует из локальной конечности μ и определения множества $\mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Теперь утверждение леммы следует из теоремы 3.4. Лемма доказана.

Далее наша задача состоит в описании свойств предельных множеств мер из класса $\mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Вначале мы сформулируем теорему, которая позволяет свести эту задачу к более простому случаю, когда $\rho(r) \equiv \rho$.

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ – уточнённые порядки такие, что $\lim \rho_1(r) = \rho_1$, $\lim \rho_2(r) = \rho_2$ ($r \rightarrow \infty$). Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho_1(r))$, а мера λ определяется равенством

$$d\lambda(t) = \frac{V_2(t)}{V_1(t)} d\mu(t).$$

Тогда $\lambda \in \mathfrak{M}_\infty(\rho_2(r))$ и соотношение $\mu_{t_n} \rightarrow \nu$ эквивалентно соотношению $\lambda_{t_n} \rightarrow \nu_1$, где $d\nu_1(t) = t^{\rho_2 - \rho_1} d\nu(t)$. Здесь

$$\mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V_1(t)}, \quad \lambda_t(E) = \frac{\lambda(tE)}{V_2(t)}, \quad V_1(r) = r^{\rho_1(r)}, \quad V_2(r) = r^{\rho_2(r)}, \quad t_n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$|\lambda|([r, er]) = \int_r^{er} \frac{V_2(t)}{V_1(t)} d|\mu|(t).$$

Из теоремы 2.1 следует, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\lambda|([r, er])}{V_2(r)} \leq \left(e^{(\rho_2 - \rho_1)_+} \right) \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mu|([r, er])}{V_1(r)} \quad (a_+ = \max\{a, 0\}).$$

поэтому $\lambda \in \mathfrak{M}_\infty(\rho_2(r))$. Пусть $\mu_{t_n} \rightarrow \nu$, $\varphi \in \Phi$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(t) d\lambda_{t_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{V_2(t_n)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u}{t_n}\right) d\lambda(u) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{V_2(t_n)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u}{t_n}\right) \frac{V_2(u)}{V_1(u)} d\mu(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(\tau) \frac{V_2(\tau t_n)}{V_1(\tau t_n)} \frac{V_1(t_n)}{V_2(t_n)} d\mu_{t_n}(\tau). \end{aligned}$$

Так как последовательность

$$\varphi(\tau) \frac{V_2(\tau t_n)}{V_1(\tau t_n)} \frac{V_1(t_n)}{V_2(t_n)}$$

сходится в пространстве Φ к функции $\tau^{\rho_2 - \rho_1} \varphi(\tau)$ и $\mu_{t_k} \rightarrow \nu$, то из теоремы 3.5 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(t) d\lambda_{t_n}(t) = \int_0^\infty \tau^{\rho_2 - \rho_1} \varphi(\tau) d\nu(\tau).$$

Тем самым мы доказали, что $\lambda_{t_n} \rightarrow \nu_1$. В доказанном утверждении можно поменять местами μ и ν . Теорема доказана.

Похожая теорема для мер в плоскости есть в [15], теорема 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $\rho_1 = \rho_2$, то меры ν и ν_1 совпадают.

Отображение A_t , $A_t\mu = \mu_t$, в случае, когда $\rho(r) \equiv \rho$ мы будем обозначать F_t или $F_t(\rho)$.

В следующей теореме приводится ряд свойств предельного множества $Fr[\mu]$.

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $Fr[\mu]$ есть непустой компакт,
- 2) $Fr[\mu]$ есть связное множество в метрическом пространстве (\mathfrak{R}_c, d) ,
- 3) множество $Fr[\mu]$ инвариантно относительно преобразования F_t , более того F_t есть взаимно однозначное отображение множества $Fr[\mu]$ на себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из замечания к теореме 3.9, не ограничивая общности, можно считать, что $\rho(r) \equiv \rho$. По лемме 3.1 полутраектория μ_t , $t \geq 1$, является компактным множеством. На языке теории динамических систем [13] это утверждение переформулируется так. Движение μ_t положительно устойчиво по Лагранжу. На компактных множествах в \mathfrak{R}_c широкая сходимость последовательности μ_n эквивалентна сходимости в метрическом пространстве (\mathfrak{R}_c, d) . Поэтому предельное множество Азарина $Fr[\mu]$ совпадает с ω -предельным множеством траектории μ_t в метрическом пространстве (\mathfrak{R}_c, d) . Теперь мы можем использовать достаточно развитую теорию динамических систем в метрических пространствах. Теорема 10, глава 5, §3 из книги [13] утверждает, что $Fr[\mu]$ есть непустой компакт, который отображение F_t взаимно однозначно отображает на себя, а теорема 14 из этой книги утверждает, что $Fr[\mu]$ есть связное множество. Теорема доказана.

Следующие теоремы являются полезным дополнением к предыдущей.

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, последовательность $t_n \rightarrow \infty$ такова, что $\mu_{t_n} \rightarrow \nu$, а последовательность τ_n сходится к $\tau > 0$. Тогда последовательность $\mu_{\tau_n t_n}$ сходится к ν_τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – произвольная функция из пространства Φ . Имеем

$$(\varphi, \mu_{t_n \tau_n}) = \frac{1}{V(t_n \tau_n)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u}{t_n \tau_n}\right) d\mu(u) = \frac{V(t_n)}{V(t_n \tau_n)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\xi}{\tau_n}\right) d\mu_{t_n}(\xi).$$

Так как $\mu_{t_n} \rightarrow \nu$, а последовательность $\frac{V(t_n)}{V(t_n \tau_n)} \varphi\left(\frac{\xi}{\tau_n}\right)$ сходится в пространстве Φ к функции $\frac{1}{\tau^\rho} \varphi\left(\frac{\xi}{\tau}\right)$, то из теоремы 3.5 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi, \mu_{t_n \tau_n}) = \frac{1}{\tau^\rho} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\nu(\xi) = (\varphi, \nu_\tau).$$

Таким образом $\mu_{t_n \tau_n} \rightarrow \nu_\tau$, и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.12. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$ и пусть $t_n \rightarrow \infty$ такая последовательность, что $\mu_{t_n} \rightarrow \nu$, $|\mu|_{t_n} \rightarrow \hat{\nu}$. Тогда $|\nu| \leq \hat{\nu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – произвольная функция из пространства Φ . Тогда

$$|(\nu, \varphi)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(\mu_{t_n}, \varphi)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|\mu|_{t_n}, |\varphi|) = (\hat{\nu}, |\varphi|).$$

Из этого легко следует неравенство $|\nu|(E) \leq \hat{\nu}(E)$. Теорема доказана.

В следующей теореме мы показываем, что некоторые асимптотические оценки для меры μ порождают глобальные оценки для мер ν из предельного множества $Fr[\mu]$. Предварительно введём некоторые новые понятия.

В случае вещественных радоновых мер наряду с предельным множеством Азари на $Fr[\mu]$ важными асимптотическими характеристиками меры μ являются её верхняя и нижняя плотности $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$. Функции плотности $N(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha)$ – это функции на полуоси $[0, \infty)$ и поэтому являются более простыми математическими объектами, чем множество мер $Fr[\mu]$. В этом преимущество функций плотности. С другой стороны, как мы увидим в дальнейшем, множество $Fr[\mu]$ даёт, вообще говоря, значительно больше информации о мере μ , чем функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$.

Пусть μ – вещественная мера Радона на полуоси $(0, \infty)$ с функцией распределения $\mu(r)$, $\rho(r)$ – уточнённый порядок. *Верхней плотностью* меры μ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ называется величина

$$N(\alpha) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu(r + \alpha r) - \mu(r)}{V(r)}. \quad (3.3)$$

В случае $\alpha > 0$ можно также писать

$$N(\alpha) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu(r, r + \alpha r]}{V(r)}. \quad (3.4)$$

Отметим, что формулой (3.3) величина $N(\alpha)$ определяется при $\alpha > -1$, а формулой (3.4) при $\alpha > 0$. В дальнейшем будем считать, что $N(0) = 0$.

Аналогично определяется *нижняя плотность* меры μ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$:

$$\underline{N}(\alpha) = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu(r + \alpha r) - \mu(r)}{V(r)}.$$

Из свойств пределов и уточнённого порядка $\rho(r)$ легко получается, что функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ удовлетворяют неравенствам

$$N(\alpha + \beta) \leq N(\alpha) + (1 + \alpha)^\rho N\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}\right), \quad (3.5)$$

$$N(\alpha + \beta) \geq N(\alpha) + (1 + \alpha)^\rho \underline{N}\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}\right), \quad (3.6)$$

$$\underline{N}(\alpha + \beta) \geq \underline{N}(\alpha) + (1 + \alpha)^\rho \underline{N}\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}\right), \quad (3.7)$$

$$\underline{N}(\alpha + \beta) \leq \underline{N}(\alpha) + (1 + \alpha)^\rho N\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}\right), \quad (3.8)$$

где $\rho = \rho(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$. Заметим, что если правая часть в каком-то из написанных неравенств имеет вид $\infty - \infty$, то это неравенство нужно считать пустым утверждением. В случае, если $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, то выполняются неравенства $-\infty < \underline{N}(\alpha) \leq N(\alpha) < \infty$. Также заметим, что величины $\underline{N}(\alpha)$ и $N(\alpha)$ могут быть конечными даже для мер не входящих в множество $\mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Это указывает на важность функций $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ при исследовании свойств меры μ . Напомним, что теорема о свойствах множества $Fr[\mu]$ доказана в предположении, что $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$.

ТЕОРЕМА 3.13. Пусть вещественная мера $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, $Fr[\mu]$ – её предельное множество, $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ – её верхняя и нижняя плотности. Тогда для любой меры $\nu \in Fr[\mu]$ существует не более чем счётное множество $E(\nu)$ такое, что при $a, b \notin E(\nu)$, $0 < a < b < \infty$ выполняются неравенства

$$\nu([a, b]) \leq a^\rho N\left(\frac{b}{a} - 1\right), \quad \nu([a, b]) \geq a^\rho \underline{N}\left(\frac{b}{a} - 1\right).$$

Для любых a и b , $0 < a < b < \infty$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \nu([a, b]) &\leq a^\rho \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} N\left(\frac{b}{a} - 1 + \varepsilon\right), \\ \nu([a, b]) &\geq a^\rho \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow +0} \underline{N}\left(\frac{b}{a} - 1 + \varepsilon\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{t_n}$. Дополнительно будем считать, что существует предел $\hat{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu|_{t_n}$. Обозначим $E(\nu) = \{x \in (0, \infty) : \hat{\nu}(\{x\}) > 0\}$. Множество $E(\nu)$ не более чем счётно. Пусть теперь $[a, b] \subset (0, \infty)$, $a, b \notin E(\nu)$. Из теоремы 3.2 следует, что

$$\nu([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{t_n}([a, b]).$$

Из равенства $\nu(\{a\}) = 0$ и той же теоремы следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{t_n}(\{a\}) = 0$. Поэтому

$$\nu([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{t_n}((a, b]) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \mu_r((a, b]) = a^\rho N\left(\frac{b}{a} - 1\right).$$

Аналогично доказывается неравенство $\nu([a, b]) \geq a^\rho \underline{N}\left(\frac{b}{a} - 1\right)$ при $a, b \notin E(\nu)$. Рассмотрим общий случай. Пусть $a_k \rightarrow a$, $a_k < a$, $b_k \rightarrow b$, $b_k > b$, причём $a_k, b_k \notin E(\nu)$ и выполняется равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N\left(\frac{b_k}{a_k} - 1\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} N\left(\frac{b}{a} - 1 + \varepsilon\right).$$

Имеем

$$\nu([a, b]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu([a_k, b_k]) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^\rho N\left(\frac{b_k}{a_k} - 1\right) = a^\rho \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} N\left(\frac{b}{a} - 1 + \varepsilon\right).$$

Аналогично получаем неравенство

$$\nu([a, b]) \geq a^\rho \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow +0} \underline{N}\left(\frac{b}{a} - 1 + \varepsilon\right).$$

Теорема доказана.

Отметим такое следствие доказанной теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$ и пусть $N(\alpha) \equiv \underline{N}(\alpha) \equiv 0$. Тогда $Fr[\mu] = \{0\}$.

Можно отметить, что соотношение $\underline{N}(\alpha) \equiv N(\alpha) \equiv 0$ и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mu|([ar, br])}{V(r)} > 0$$

не противоречат друг другу.

Мера ν называется *непрерывной*, если для любого x $\nu(\{x\}) = 0$. Иногда важно, чтобы меры из предельного множества $Fr[\mu]$ были непрерывными. Справедлив следующий признак непрерывности.

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, а $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ – её функции плотности относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Если функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ непрерывны на полуоси $[0, \infty)$, то любая мера ν из множества $Fr[\mu]$ непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu \in Fr[\mu]$, $x \in (0, \infty)$, a_n – строго возрастающая, b_n – строго убывающая последовательности, сходящиеся к x , причём $a_n, b_n \notin E(\nu)$. Применение теоремы 3.13 даёт

$$\begin{aligned} \nu(\{x\}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu([a_n, b_n]) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\rho N\left(\frac{b_n}{a_n} - 1\right) = 0, \\ \nu(\{x\}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu([a_n, b_n]) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\rho \underline{N}\left(\frac{b_n}{a_n} - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Тем самым теорема доказана.

Для положительных мер μ имеет место следующий критерий непрерывности мер из множества $Fr[\mu]$.

ТЕОРЕМА 3.15. Пусть μ – положительная мера из множества $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, $N(\alpha)$ – верхняя плотность меры μ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Для того, чтобы все меры из предельного множества $Fr[\mu]$ были непрерывными, необходимо и достаточно, чтобы $N(\alpha) \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow +0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow +0$. Тогда и $\underline{N}(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow +0$. В этом случае функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ будут непрерывными. По предыдущей теореме любая мера из множества $Fr[\mu]$ будет непрерывной.

Докажем теперь необходимость условия $N(\alpha) \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow +0$). Предположим противное. Тогда $N(\alpha) \rightarrow 2a$ ($\alpha \rightarrow +0$), где $a > 0$. В этом случае существуют последовательности $r_n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_n \downarrow 0$ такие, что $\mu((r_n, (1 + \varepsilon_n)r_n]) > aV(r_n)$. Дополнительно можно считать, что $\mu_{r_n} \rightarrow \nu$. Пусть $0 < a_k < 1 < b_k$, $a_k \rightarrow 1$, $b_k \rightarrow 1$, $\nu(\{a_k\}) = 0$, $\nu(\{b_k\}) = 0$. Тогда, используя теорему 3.2, находим, что

$$\nu(\{1\}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu([a_k, b_k]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{r_n}([a_k, b_k]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu((a_k r_n, b_k r_n])}{V(r_n)}.$$

При фиксированном k и достаточно больших n будет выполняться соотношение $(r_n, (1 + \varepsilon_n)r_n] \subset (a_k r_n, b_k r_n)$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu((a_k r_n, b_k r_n])}{V(r_n)} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu((r_n, (1 + \varepsilon_n)r_n])}{V(r_n)} \geq a.$$

Из этого следует, что $\nu(\{1\}) \geq a$. Это противоречит тому, что меры из множества $Fr[\mu]$ непрерывны. Теорема доказана.

Обозначим через $M(\rho, \sigma)$ множество вещественных или комплексных радоновых мер, состоящее из всех мер μ , которые удовлетворяют неравенствам:

$$|\mu|((0, r]) \leq \sigma r^\rho \quad \text{при} \quad 0 < r < \infty, \quad \rho > 0,$$

$$|\mu|([a, b]) \leq \sigma \ln \frac{b}{a}, \quad 0 < a < b < \infty, \quad \rho = 0,$$

$$|\mu|((r, \infty)) \leq \sigma r^\rho \quad \text{при} \quad 0 < r < \infty, \quad \rho < 0.$$

ТЕОРЕМА 3.16. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Тогда существует такое $\sigma > 0$, что $Fr[\mu] \subset M(\rho, \sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $N_1(\alpha)$ верхнюю плотность меры $|\mu|$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Так как $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, то $N_1(\alpha) < \infty$. Пусть $q > 1$ – произвольное число. Применяя теоремы 3.12, 3.13, находим, что

$$\begin{aligned} |\nu|((0, r]) &\leq \hat{\nu}((0, r]) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\nu}\left(\left(\frac{r}{q^{n+1}}, \frac{r}{q^n}\right]\right) \\ &\leq r^\rho N_1(q - 1 + 0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^{(n+1)\rho}} = \frac{N_1(q - 1 + 0)}{q^\rho - 1} r^\rho, \end{aligned}$$

если $\rho > 0$. Аналогично при $\rho < 0$ получаем, что

$$\begin{aligned} |\nu|((r, \infty)) &\leq \hat{\nu}((r, \infty)) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\nu}((q^n r, q^{n+1} r]) \\ &\leq r^\rho N_1(q - 1 + 0) \sum_{n=0}^{\infty} q^{n\rho} = \frac{N_1(q - 1 + 0)}{1 - q^\rho} r^\rho. \end{aligned}$$

Случай, когда $\rho = 0$, рассматривается аналогично. Тем самым, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из приведенного доказательства следует, что в соотношении $Fr[\mu] \subset M(\rho, \sigma)$ в качестве σ можно взять число

$$\hat{\sigma} = \inf_{q > 1} \frac{N_1(q - 1 + 0)}{|q^\rho - 1|}.$$

Отметим, что, как следует из теорем 6 и 14 из [16], в случае $\rho > 0$ выполняется равенство

$$\hat{\sigma} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{N_1(q-1+0)}{q^\rho - 1} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mu|((1, r])}{V(r)}.$$

Случай $\rho < 0$ также рассматривается в работе [16].

Рассмотрим примеры на вычисление предельного множества $Fr[\mu]$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок, μ – мера на полуоси $(0, \infty)$ с плотностью $\frac{V(x)}{x}$. Тогда предельное множество $Fr[\mu]$ меры μ , построенное по уточнённому порядку $\rho(r)$, состоит из одной меры ν , $d\nu(x) = x^{\rho-1}dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \Phi$. Используя теорему 2.1, получаем

$$(\varphi, \mu_t) = \int_0^\infty \varphi(x) d\mu_t(x) = \frac{1}{V(t)} \int_0^\infty \varphi(x) \frac{V(xt)}{x} dx,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi, \mu_t) = \int_0^\infty \varphi(x) x^{\rho-1} dx = (\varphi, \nu).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок, μ – мера на полуоси $(0, \infty)$ с плотностью $x^{i\lambda_0} \frac{V(x)}{x}$. Тогда

$$Fr[\mu] = \{\nu : d\nu(u) = e^{i\lambda_0 c} u^{i\lambda_0 + \rho - 1} du : c \in (-\infty, \infty)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \Phi$. Имеем

$$(\varphi, \mu_r) = \frac{1}{V(r)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{x}{r}\right) x^{i\lambda_0} \frac{V(x)}{x} dx = r^{i\lambda_0} \int_0^\infty \varphi(u) u^{i\lambda_0} \frac{V(ur)}{V(r)} \frac{1}{u} du.$$

Из этого равенства и теоремы 2.1 легко следует утверждение леммы.

Мера μ называется *периодической* мерой порядка ρ с периодом $T > 1$, если для этого T и любого борелевского множества E выполняется равенство

$$\mu(TE) = T^\rho \mu(E). \quad (3.9)$$

ЛЕММА 3.4. Пусть μ – локально конечная периодическая мера порядка ρ с периодом $T > 1$. Тогда $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho)$, $Fr[\mu] = \{\mu_t : 1 \leq t < T\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho)$ очевидно. Пусть $t \in [1, T)$, $t_n = tT^n$. Из равенства (3.9) следует, что $\mu_{t_n} = \mu_t$. Поэтому $\mu_{t_n} \rightarrow \mu_t$. Тем самым, доказано соотношение $\{\mu_t : t \in [1, T)\} \subset Fr[\mu]$.

Пусть теперь t_n такая последовательность, что $\mu_{t_n} \rightarrow \nu$. Существует такое целое число $m(n)$, что $t_n = \tau_n T^{m(n)}$, где $\tau_n \in [1, T)$. Из равенства (3.9) следует, что $\mu_{t_n} = \mu_{\tau_n}$. По теореме Больцано-Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность τ_{n_k} , $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{n_k} = \tau$, причём $\tau \in [1, T]$. Имеем $\mu_{\tau_{n_k}} \rightarrow \mu_\tau$. Тогда $\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{t_{n_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\tau_{n_k}} = \mu_\tau$. Вместе с равенствами $\mu = \mu_1 = \mu_T$ это даёт соотношение $Fr[\mu] \subset \{\mu_t : t \in [1, T)\}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Пусть α – произвольное строго положительное число, а n – произвольное целое число. При выполнении условий леммы 3.4 справедливо соотношение

$$Fr[\mu] = \{\mu_t : t \in [\alpha T^n, \alpha T^{n+1}]\}.$$

Случай $\alpha = 1$, $n = 0$ соответствует утверждению леммы 3.4.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\rho > 0$, а R_n – строго возрастающая последовательность такая, что $R_1 \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{R_{n-1}} = \infty$. Пусть мера μ задаётся формулой

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} R_n^\rho \delta(x - R_n).$$

Тогда предельное множество $Fr[\mu]$ меры μ относительно уточнённого порядка $\rho(r) \equiv \rho$ имеет вид

$$Fr[\mu] = \{t^\rho \delta(x - t) : t \in (0, \infty)\} \cup \{0\}. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $R_{n-1} = o(R_n)$ с помощью теоремы Штольца легко получить, что

$$\sum_{k=1}^n R_k^\rho \sim R_n^\rho \quad (n \rightarrow \infty).$$

Пусть $r \geq R_1$ и произвольное, а n – наибольшее целое число, для которого выполняется неравенство $R_n \leq r$. Тогда

$$\mu((0, r]) = \sum_{k=1}^n R_k^\rho = (1 + o(1)) R_n^\rho \leq (1 + o(1)) r^\rho \quad (r \rightarrow \infty).$$

Из этого следует, что $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho)$.

Пусть теперь $t > 0$ и произвольно, а $t_n = \frac{1}{t} R_n$. Пусть φ – произвольная функция из пространства Φ . Тогда для всех достаточно больших n выполняется равенство

$$(\mu_{t_n}, \varphi) = \frac{t^\rho}{R_n^\rho} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{ut}{R_n}\right) d\mu(u) = t^\rho \varphi(t) = (t^\rho \delta(x - t), \varphi(x)).$$

Отсюда следует, что $\mu_{t_n} \rightarrow t^\rho \delta(x - t)$. Точно так же доказывается, что если $t_n = \frac{1}{\tau_n} R_n$, где τ_n – последовательность, удовлетворяющая условиям $\tau_n \rightarrow \infty$, $\frac{\tau_n R_{n-1}}{R_n} \rightarrow 0$, то $\mu_{t_n} \rightarrow 0$.

Обозначим через H правую часть равенства (3.10). Мы доказали, что $H \subset Fr[\mu]$.

Пусть теперь ν – произвольная мера из $Fr[\mu]$. Тогда $\nu = \lim \mu_{t_n}$, где $t_n \rightarrow \infty$. Дополнительно можно считать, что каждый сегмент $[R_{k-1}, R_{k+1}]$ содержит не более, чем одну точку t_n . Обозначим через $m(n)$ такое целое число, что точка $\ln R_{m(n)}$ есть ближайшая точка последовательности $\ln R_k$ к точке $\ln t_n$ (если таких чисел два, то в качестве $m(n)$ выбираем меньшее). Дополнительное ограничение на последовательность t_n обеспечивает выполнение условия $m(n_1) \neq m(n_2)$ при $n_1 \neq n_2$. Таким образом, существует однозначное представление числа t_n в виде

$$t_n = \frac{1}{\tau_n} R_{m(n)}. \quad (3.11)$$

Дополнительно можно предположить, что последовательность τ_n сходится либо к конечному пределу, либо к бесконечности. Предположим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty. \quad (3.12)$$

Выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \ln t_n - \ln R_{m(n)-1} &\geq \ln R_{m(n)} - \ln t_n, \\ t_n &\geq \sqrt{\frac{R_{m(n)}}{R_{m(n)-1}}}, \quad \tau_n \leq \sqrt{R_{m(n)-1} R_{m(n)}}, \\ \frac{\tau_n R_{m(n)-1}}{R_{m(n)}} &\leq \sqrt{\frac{R_{m(n)-1}}{R_{m(n)}}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n R_{m(n)-1}}{R_{m(n)}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из соотношений (3.11)-(3.13) следует, что $\mu_{t_n} \rightarrow 0$. Значит, в рассматриваемом случае $\nu = 0$.

Аналогично доказывается, что в случае, если $\tau_n \rightarrow 0$ также выполняется соотношение $\mu_{t_n} \rightarrow 0$. Это следует из легко проверяемого соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n R_{m(n)+1}}{R_{m(n)}} = \infty. \quad (3.14)$$

Пусть теперь $\tau_n \rightarrow \tau \in (0, \infty)$. Уже доказано соотношение $\mu_{\tilde{t}_n} \rightarrow \tau^\rho \delta(x - \tau)$, где $\tilde{t}_n = \frac{1}{\tau} R_{m(n)}$. Теперь из теоремы 3.11, применённой к последовательности \tilde{t}_n следует, что $\mu_{t_n} \rightarrow \tau^\rho \delta(x - \tau)$. Следовательно, в этом случае $\nu = \tau^\rho \delta(x - \tau)$. Мы доказали, что в любом случае $\nu \in H$. Тем самым доказано соотношение $Fr[\mu] \subset H$. Из приведенных рассуждений следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Отметим, что доказательство леммы можно извлечь из работы [17].

С точки зрения теории предельных множеств наиболее простыми являются те меры $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, для которых предельное множество $Fr[\mu]$ состоит из одной меры ν . Такие меры мы называем *регулярными* или *регулярными в смысле Азарина*. Исследуем, какой может быть предельная мера для регулярной меры μ .

ТЕОРЕМА 3.17. Пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок, $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(r)$ и $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Пусть мера μ регулярная и $\{\nu\} = Fr[\mu]$. Тогда существует комплексное число c такое, что $d\nu(r) = cr^{\rho-1}dr$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если комплексная радонова мера $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ регулярна, то регулярными будут и меры μ_1 и μ_2 . Поэтому достаточно доказывать теорему для вещественных мер Радона. Поскольку множество $Fr[\mu]$ инвариантно относительно преобразования F_t , то выполняется равенство $\nu = F_t\nu$. Пусть $0 < a < b < \infty$. Тогда, в частности, $\nu((a, b]) = (F_t\nu)((a, b]) = t^{-\rho}\nu((at, bt])$. Выбирая $t = \frac{1}{a}$, получим $\nu((a, b]) = a^\rho\nu((1, \frac{b}{a}])$. Обозначим $N(s) = \nu((1, 1+s])$, $s > 0$. Тогда

$$N(s_1 + s_2) = \nu((1, 1+s_1]) + \nu((1+s_1, 1+s_1+s_2]) = N(s_1) + (1+s_1)^\rho N\left(\frac{s_2}{1+s_1}\right).$$

Функции N , удовлетворяющие такому равенству в [16] называются ρ -аддитивными. Поскольку ν – локально конечная мера на полуоси $(0, \infty)$, то функция N ограничена на полуинтервале $(0, 1]$. По теореме 4 [16] существует вещественное c такое, что справедливы соотношения

$$N(s) = \frac{c}{\rho} ((1+s)^\rho - 1), \quad \rho \neq 0, \quad N(s) = c \ln(1+s), \quad \rho = 0.$$

Мы получаем, что при $b > 1$ выполняются равенства

$$\nu((1, b]) = \frac{c}{\rho} (b^\rho - 1), \quad \rho \neq 0, \quad \nu((1, b]) = c \ln b, \quad \rho = 0.$$

Из этих равенств легко следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следующее свойство регулярных мер есть простое следствие определений.

Будем говорить, что сеть мер μ_R ($R \in (0, \infty)$) широко сходится к мере μ при $R \rightarrow \infty$, если для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется равенство $\lim_{R \rightarrow \infty} (\mu_R, \varphi) = (\mu, \varphi)$.

ТЕОРЕМА 3.18. Пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$ – регулярная мера, причём $\{\nu\} = Fr[\mu]$. Тогда

$$\nu = \lim_{R \rightarrow \infty} \mu_R. \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(x) d\mu_R(x) = a(\varphi). \quad (3.16)$$

Если это утверждение неверно, то существуют функция $\varphi \in \Phi$ и две последовательности $r_n \rightarrow \infty$ и $R_n \rightarrow \infty$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(x) d\mu_{r_n}(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(x) d\mu_{R_n}(x). \quad (3.17)$$

Так как семейство мер μ_R , $R \geq 1$, компактно, то, не ограничивая общности, можно считать, что последовательности μ_{r_n} и μ_{R_n} широко сходятся. Поскольку предельное множество $Fr[\mu]$ состоит из одной меры ν , то $\mu_{r_n} \rightarrow \nu$ и $\mu_{R_n} \rightarrow \nu$. По определению широкой сходимости

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(x) d\mu_{r_n}(x) &= \int_0^\infty \varphi(x) d\nu(x), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(x) d\mu_{R_n}(x) &= \int_0^\infty \varphi(x) d\nu(x). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Это противоречит (3.17) и, тем самым, равенство (3.16) доказано. Из равенства (3.18) следует, что $a(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x) d\nu(x)$. Теорема доказана.

В следующей теореме описываются положительные регулярные меры.

ТЕОРЕМА 3.19. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, μ – положительная мера на полуоси $(0, \infty)$, $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Для того, чтобы мера μ была регулярной относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие (в зависимости от знака ρ это условие записывается в различной форме):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu((1, R])}{V(R)} = c, \quad \rho > 0, \quad (3.19)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu([R, \infty))}{V(R)} = c, \quad \rho < 0, \quad (3.20)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu((aR, bR])}{V(R)} = c \ln \frac{b}{a}, \quad \rho = 0, \quad (3.21)$$

для любых a и b , $0 < a < b < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко увидеть, записывая соответствующие интегральные суммы Римана-Стилтьеса, что из равенств (3.19)-(3.21) следует, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(x) d\mu_R(x) = \int_0^\infty \varphi(x) d\nu(x), \quad (3.22)$$

где $d\nu(x) = c|\rho|x^{\rho-1}dx$, если $\rho \neq 0$ и $d\nu(x) = \frac{c}{x}dx$, если $\rho = 0$. Очевидно, что из (3.22) следует регулярность меры μ .

Переходим теперь к доказательству необходимости. Пусть μ – регулярная мера. Тогда по теореме 3.18 $\lim_{R \rightarrow \infty} \mu_R = \nu$. По теореме 3.16 мера ν непрерывна. Из теоремы 3.2 следует, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \mu_R([a, b]) = \nu([a, b])$. Это эквивалентно равенствам (3.19)-(3.21). Теорема доказана.

Теорема 3.19 не справедлива для вещественных мер Радона. Из теоремы 3.17 и леммы 3.4 следует, что для того, чтобы описать вещественные регулярные меры, достаточно описать вещественные меры с нулевым предельным множеством. Это сделано в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.20. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Для того, чтобы выполнялось равенство $Fr[\mu] = \{0\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала возрастающая последовательность r_n сходящаяся к бесконечности такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = 1,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{V(R)} \sum_{(r_n, r_{n+1}] \cap [R, 2R] \neq \emptyset} |\mu((r_n, r_{n+1}])| = 0.$$

Доказательство теоремы 3.20 нам известно. Оно значительно сложнее доказательства теоремы 3.19 и выходит за рамки нашей работы. Заметим, однако, что доказательство теоремы 3.20 в сторону достаточности довольно просто. Теорема 3.20 приведена для полноты информации.

4 Абелевы теоремы для интегралов

Мы приступаем к изложению результатов, которые могут быть описаны как абелевы теоремы для интегралов. Основными объектами нашего исследования являются функции $\Psi(r)$, $J(r)$, мера s , множество $L(J, \infty)$ (смотри формулу (1.2) и следующий за ней текст).

Одна из целей этого раздела – описать свойства функции $J(r)$ в зависимости от ограничений на ядро K и меру μ .

Мы начнём со следующего просто доказываемого утверждения. Тем не менее это утверждение содержит основную идею метода – использовать для описания свойств функции $J(r)$ предельное множество $Fr[\mu]$ меры μ .

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, K – непрерывное финитное ядро на полуоси $(0, \infty)$. Тогда выполняется равенство*

$$L(J, \infty) = \left\{ \int_0^\infty K(u) d\nu(u) : \nu \in Fr[\mu] \right\}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через H правую часть равенства (4.1). Пусть ν – произвольная мера из множества $Fr[\mu]$. Существует последовательность $r_n \rightarrow \infty$ такая, что $\mu_{r_n} \rightarrow \nu$. Тогда по определению широкой сходимости $J(r_n) \rightarrow \int_0^\infty K(u) d\nu(u)$. Мы доказали включение $H \subset L(J, \infty)$.

Пусть теперь $r_n \rightarrow \infty$ такая последовательность, что последовательность $J(r_n)$ сходится в собственном или несобственном (сходится к бесконечности) смысле. Так как по лемме 3.1 полутраектория μ_r , $r \geq 1$, компактна, то не ограничивая общности можно считать, что последовательность μ_{r_n} широко сходится к некоторой мере ν . По определению $Fr[\mu]$ $\nu \in Fr[\mu]$. По доказанному $J(r_n) \rightarrow \int_0^\infty K(u) d\nu(u)$. Мы доказали справедливость включения $L(J, \infty) \subset H$, а вместе с этим – и теорему.

Значительная часть дальнейших результатов главы будет вариантами теоремы 4.1. Мы будем рассматривать различные ограничения на ядро K и меру μ . Для начала посмотрим, к чему ведёт отказ от непрерывности ядра K . В этом случае множество $Fr[\mu]$ уже не определяет множество $L(J, \infty)$.

Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Расширенным предельным множеством $\widehat{Fr}[\mu]$ меры μ назовём множество пар мер (ν_1, ν_2) таких, что существует последовательность $r_n \rightarrow \infty$ такая, что $\mu_{r_n} \rightarrow \nu$, $\mu_{r_n}^1 \rightarrow \nu_1$, $\mu_{r_n}^2 \rightarrow \nu_2$, где $\mu_{r_n}^1$ – ограничение меры μ_{r_n} на полуинтервал $(0, 1]$, а $\mu_{r_n}^2$ – ограничение меры μ_{r_n} на полуось $(1, \infty)$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, K – функция финитная на полуоси $(0, \infty)$ непрерывная всюду, кроме точки $t = 1$, которая является точкой разрыва первого рода для функции $K(t)$, причём функция $K(t)$ непрерывна слева в точке $t = 1$. Тогда выполняется равенство*

$$L(J, \infty) = \left\{ \int_{(0,1]} K(t) d\nu_1(t) + \int_{[1,\infty)} \tilde{K}(t) d\nu_2(t) : (\nu_1, \nu_2) \in \widehat{Fr}[\mu] \right\},$$

где \tilde{K} – непрерывное продолжение функции $K(t)$ с полуоси $(1, \infty)$ на полуось $[1, \infty)$.

Отметим, что хотя мера $\mu_{r_n}^2$ не нагружает точку 1, мера ν_2 может нагружать эту точку. Поэтому в формулировке теоремы функцию $\tilde{K}(t)$ нельзя заменить на функцию $K(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы 4.2 проходит по схеме доказательства теоремы 4.1. Нужно только пользоваться равенствами типа нижеследующего. Пусть $K_1(t)$ – непрерывное финитное продолжение функции $K(t)$ с полуинтервала $(0, 1]$ на полуось $(0, \infty)$. Тогда

$$\int_0^1 K(t) d\nu_1(t) = \int_0^1 K_1(t) d\nu_1(t) = \int_0^\infty K_1(t) d\nu_1(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty K_1(t) d\mu_{r_n}^1(t).$$

При соответствующих ограничениях на меру μ требование непрерывности ядра K становится излишним. В случае разрывных ядер K и абсолютно непрерывных мер μ интеграл $\int_0^\infty K(t) d\mu(t)$ следует понимать как $\int_0^\infty K(t) \mu'(t) dt$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$ с плотностью $\mu'(r)$, удовлетворяющей неравенству $|\mu'(r)| \leq M \frac{V(r)}{r}$, $r \in [1, \infty)$, K – финитное ядро из пространства $L_1(0, \infty)$. Тогда

$$L(J, \infty) = \left\{ \int_a^b K(u) d\nu(u) : \nu \in Fr[\mu] \right\}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N_1(t)$ – верхняя плотность меры $|\mu|$. Имеем

$$\begin{aligned} N_1(\alpha) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mu|((r, (1+\alpha)r])}{V(r)} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} M \int_r^{(1+\alpha)r} \frac{1}{t} \frac{V(t)}{V(r)} dt \\ &= M \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^{1+\alpha} \frac{1}{u} \frac{V(ur)}{V(r)} du = M \frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}. \end{aligned}$$

Из теоремы 3.15 следует, что все меры во множестве $Fr[|\mu|]$ непрерывны. Все меры во множестве $Fr[\mu]$ также будут непрерывны. Из сказанного и теоремы 3.2 следует, что если $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{t_n}$, то выполняется равенство

$$\nu([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{t_n}([a, b])$$

для любого сегмента $[a, b] \subset (0, \infty)$. Из этого следует, что

$$|\nu([a, b])| < \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \int_a^b d|\mu|_{t_n}(t) \leq M \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{t} \frac{V(t_n t)}{V(t_n)} dt = M \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}.$$

Из этого неравенства следует, что любая мера ν из множества $Fr[\mu]$ является абсолютно непрерывной и выполняется неравенство $|\nu'(x)| \leq Mx^{\rho-1}$. Пусть $r_n \rightarrow \infty$ такая последовательность, что $\mu_{r_n} \rightarrow \nu$. Пусть ε – произвольное строго положительное число, а K_1 – финитная непрерывная функция на полуоси $(0, \infty)$ и такая, что

$$\int_0^\infty |K(t) - K_1(t)| dt < \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty K(t) d\mu_{r_n}(t) - \int_0^\infty K(t) d\nu(t) \right| \leq \left| \int_0^\infty (K(t) - K_1(t)) d\mu_{r_n}(t) \right| \\ & + \left| \int_0^\infty (K(t) - K_1(t)) d\nu(t) \right| + \left| \int_0^\infty K_1(t) d\mu_{r_n}(t) - \int_0^\infty K_1(t) d\nu(t) \right|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty (K(t) - K_1(t)) d\mu_{r_n}(t) \right| \leq M \int_0^\infty |K(t) - K_1(t)| \frac{V(r_nt)}{tV(r_n)} dt \\ & \leq 2M \int_0^\infty |K(t) - K_1(t)| t^{\rho-1} dt \leq 2M \max\{t^{\rho-1} : t \in [a, b]\} \varepsilon, \end{aligned}$$

где $[a, b] \subset (0, \infty)$ такой сегмент, что $\text{supp } K, \text{supp } K_1 \subset [a, b]$. Второе слагаемое в правой части неравенства (4.3) допускает такую же оценку. Третье слагаемое стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Из сказанного следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(r_n) = \int_0^\infty K(u) d\nu(u).$$

Тем самым доказано, что справедливо включение $H \subset L(J, \infty)$, где H – правая часть равенства (4.2). Доказательство заканчивается рассуждением аналогичным тому, которое приведено при доказательстве теоремы 4.1.

Далее в условиях теорем 4.1-4.3 мы заменим требование финитности ядра K более слабым ограничением на это ядро с сохранением утверждений этих теорем. При этом усиливается ограничение на меру μ .

Начнём с необходимых определений.

Мы будем говорить, что тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет *условию нейтрализации нуля*, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \int_0^\varepsilon K(t) d\mu_r(t) \right| = 0.$$

Мы будем говорить, что тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет *условию нейтрализации бесконечности*, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \int_N^\infty K(t) d\mu_r(t) \right| = 0.$$

Заметим, что если K – финитное ядро на полуоси $(0, \infty)$, то тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности при любом уточнённом порядке $\rho(r)$ и любой радоновой мере μ на полуоси $(0, \infty)$.

Введённые определения дают возможность упростить формулировки ряда теорем, позволяя не детализировать ограничения на ядро K и меру μ , которые обеспечивают выполнимость условий нейтрализации нуля и бесконечности. Детализацию ограничений на K и μ можно оформлять как самостоятельные утверждения.

ЛЕММА 4.1. *Если тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условию нейтрализации нуля, то*

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0}} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} K(t) d\mu_r(t) \right| = 0.$$

ЛЕММА 4.2. *Если тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условию нейтрализации бесконечности, то*

$$\lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ N_2 \rightarrow \infty}} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{N_1}^{N_2} K(t) d\mu_r(t) \right| = 0.$$

Леммы 4.1 и 4.2 очевидны.

ТЕОРЕМА 4.4. *Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}(\rho(r))$, K – непрерывное ядро на полуоси $(0, \infty)$. Если тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности, то для любой меры $\nu \in Fr[\mu]$ интеграл $\int_0^\infty K(t) d\nu(t)$ существует как несобственный интеграл с особыми точками 0 и ∞ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν – произвольная мера из предельного множества $Fr[\mu]$. Существует последовательность $r_n \rightarrow \infty$ такая, что $\mu_{r_n} \rightarrow \nu$. Дополнительно можно считать, что $|\mu|_{r_n} \rightarrow \hat{\nu}$. Так как тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля, то из леммы 4.1 следует, что для любого $\delta > 0$ существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что если $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$, то будет выполняться неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} K(t) d\mu_r(t) \right| \leq \delta.$$

В частности,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} K(t) d\mu_{r_n}(t) \right| \leq \delta. \quad (4.4)$$

Пусть E – множество точек, которые нагружает мера $\hat{\nu}$. Множество E – это не более чем счётное множество. Дополнительно предположим, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \notin E$. Используя теорему 3.2, неравенство (4.4) можно переписать в виде

$$\left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} K(t) d\nu(t) \right| \leq \delta. \quad (4.5)$$

В этом неравенстве предполагается, что числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ удовлетворяют ограничению $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \notin E$. Однако из равенства

$$\left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} K(t) d\nu(t) \right| = \lim_{h \rightarrow +0} \left| \int_{\varepsilon_1-h}^{\varepsilon_2+h} K(t) d\nu(t) \right|$$

следует, что это ограничение можно отбросить. Тогда неравенство (4.5) означает, что для несобственного интеграла $\int_0^\infty K(t) d\nu(t)$ выполняется условие Коши сходимости интеграла в особой точке 0. Следовательно, интеграл сходится в нуле. Аналогично доказывается сходимость этого интеграла в бесконечности. Теорема доказана.

Теперь мы можем доказать вариант теоремы 4.1, в котором требование финитности ядра K отсутствует.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, K – непрерывное ядро на полуоси $(0, \infty)$. Если тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности, то

$$L(J, \infty) = \left\{ \int_0^\infty K(u) d\nu(u) : \nu \in Fr[\mu] \right\}. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν – произвольная мера из предельного множества $Fr[\mu]$. Существует последовательность $r_n \rightarrow \infty$ такая, что $\mu_{r_n} \rightarrow \nu$, $|\mu|_{r_n} \rightarrow \hat{\nu}$. Пусть δ – произвольное строго положительное число. Из того, что тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности и из теоремы 4.4 следует, что существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $N_0 > 0$ такие, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $N > N_0$ будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \int_0^\varepsilon K(t) d\mu_r(t) \right| &< \delta, & \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \int_N^\infty K(t) d\mu_r(t) \right| &< \delta, \\ \left| \int_0^\varepsilon K(t) d\nu(t) \right| &< \delta, & \left| \int_N^\infty K(t) d\nu(t) \right| &< \delta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Будем считать, что точки ε и N удовлетворяют выписанным для них соотношениям и, кроме того, не нагружаются мерой $\hat{\nu}$. Тогда

$$\left| \int_0^\infty K(t) d\mu_{r_n}(t) - \int_0^\infty K(t) d\nu(t) \right| \leq \left| \int_0^\varepsilon K(t) d\mu_{r_n}(t) \right| + \left| \int_0^\varepsilon K(t) d\nu(t) \right|$$

$$+ \left| \int_N^\infty K(t) d\mu_{r_n}(t) \right| + \left| \int_N^\infty K(t) d\nu(t) \right| + \left| \int_\varepsilon^N K(t) d\mu_{r_n}(t) - \int_\varepsilon^N K(t) d\nu(t) \right|. \quad (4.8)$$

По теореме 3.2 последнее из выписанных слагаемых стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Из этого, а также из неравенств (4.7) и (4.8) следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^\infty K(t) d\mu_{r_n}(t) - \int_0^\infty K(t) d\nu(t) \right| \leq 4\delta.$$

Из этого, в свою очередь следует, что $H \subset L(J, \infty)$, где H – правая часть равенства (4.6). Окончание доказательства такое же, как и в теореме 4.1. Теорема доказана.

Далее мы приводим варианты теорем 4.2 и 4.3, в которых требование финитности ядра K отсутствует. Они доказываются с помощью рассуждений аналогичных тем, которые применялись при доказательстве теоремы 4.5.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$. Пусть $K(t)$ – ядро на полуоси $(0, \infty)$ непрерывное всюду кроме точки 1, которая является точкой разрыва первого рода, причём функция $K(t)$ непрерывна слева в точке 1. Пусть тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности. Тогда

$$L(J, \infty) = \left\{ \int_0^1 K(t) d\nu_1(t) + \int_1^\infty \tilde{K}(t) d\nu_2(t) : (\nu_1, \nu_2) \in \widehat{Fr}[\mu] \right\},$$

где $\tilde{K}(t)$ – непрерывное продолжение ядра с полуоси $(1, \infty)$ на полуось $[1, \infty)$.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$ с плотностью $\mu'(r)$, удовлетворяющей неравенству $|\mu'(r)| \leq M \frac{V(r)}{r}$. Пусть $K(t)$ – локально интегрируемое ядро на полуоси $(0, \infty)$ и пусть тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности. Тогда

$$L(J, \infty) = \left\{ \int_0^\infty K(t) d\nu(t) : \nu \in Fr[\mu] \right\}.$$

В связи с теоремами 4.5-4.7 важное значение приобретает вопрос об ограничениях на ядро K и меру μ , которые бы гарантировали, что тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности. Мы докажем два результата на эту тему. В связи с нижеследующими утверждениями напомним, что функция $\gamma(t)$ определена равенством (1.1).

ЛЕММА 4.3. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$ с плотностью $\mu'(r)$, удовлетворяющей неравенству $|\mu'(r)| \leq M \frac{V(r)}{r}$ ($r \in (0, \infty)$). Пусть $t^{\rho-1} \gamma(t) K(t) \in L_1(0, \infty)$. Тогда тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство (2.15), находим, что

$$\left| \int_0^\varepsilon K(t) d\mu_r(t) \right| \leq M \int_0^\varepsilon |K(t)| \frac{V(rt)}{tV(r)} dt \leq M \int_0^\varepsilon t^{\rho-1} \gamma(t) |K(t)| dt.$$

Из этого неравенства и условия $t^{\rho-1} \gamma(t) |K(t)| \in L_1(0, \infty)$ следует, что тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условию нейтрализации нуля. Аналогично доказывается, что эта тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условию нейтрализации бесконечности. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В формулировке леммы 4.3 участвует функция $\gamma(t)$, исследование которой представляет определённые трудности. Эти исследования становятся излишними, если ядро K удовлетворяет условию $t^{\rho-1} \frac{1+t^{2\varepsilon}}{t^\varepsilon} K(t) \in L_1(0, \infty)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Из этого соотношения и теоремы 2.5 вытекает, что $t^{\rho-1} \gamma(t) K(t) \in L_1(0, \infty)$.

Следующий результат восходит к Винеру.

Пусть $K(t)$ – ядро на полуоси $(0, \infty)$. Обозначим

$$K_n = \sup\{|K(t)| : t \in (e^n, e^{n+1}]\}, \quad n \in (-\infty, \infty).$$

Множество $\mathfrak{M}(\rho(r))$, участвующие в формулировке следующей леммы, определено во введении.

ЛЕММА 4.4. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}(\rho(r))$. Пусть $K(t)$ – борелевская функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что сходится ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n\rho} \gamma(e^n) K_n, \quad \rho = \rho(\infty). \quad (4.9)$$

Тогда тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $\mu \in \mathfrak{M}(\rho(r))$ следует, что существует такое $A > 0$, что для любого $r > 0$ выполняется неравенство $|\mu|((r, er]) \leq AV(r)$. Далее находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{V(r)} \int_0^{\varepsilon r} K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t) \right| &\leq \frac{1}{V(r)} \sum_{n=-\infty}^{n_0} \int_{e^n r}^{e^{n+1} r} \left| K\left(\frac{u}{r}\right) \right| d|\mu|(u) \\ &\leq \frac{1}{V(r)} \sum_{n=-\infty}^{n_0} K_n |\mu|((e^n r, e^{n+1} r]) \leq \frac{A}{V(r)} \sum_{n=-\infty}^{n_0} K_n V(e^n r) \leq A \sum_{n=-\infty}^{n_0} K_n e^{n\rho} \gamma(e^n), \end{aligned}$$

где $n_0 = [\ln \varepsilon]$. Из полученного неравенства и сходимости ряда (4.9) следует, что тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условию нейтрализации нуля. Аналогично доказывается, что эта тройка удовлетворяет условию нейтрализации бесконечности. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Условие сходимости ряда (4.9) можно заменить на более сильное ограничение, потребовав, чтобы при некотором $\varepsilon > 0$ сходился ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 + e^{2\varepsilon n}}{e^{\varepsilon n}} e^{n\rho} K_n.$$

При этом не возникает необходимость исследовать функцию $\gamma(t)$.

Рассмотрим функцию

$$v(z) = \int_0^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{z}{t} \right| d\mu(t),$$

где μ – положительная мера на полуоси $(0, \infty)$ из класса $\mathfrak{M}_{\infty}(\rho(r))$, $\rho = \rho(\infty) \in (0, 1)$, и такая, что написанный интеграл сходится в нуле. Эта функция хорошо известна в теории роста субгармонических функций и явилась объектом многочисленных исследований. В случае, если мера μ является регулярной, функция $v(z)$ принадлежит специальному классу субгармонических функций вполне регулярного роста (относительно уточнённого порядка $\rho(r)$) в смысле Леви-Пфлюгера. В этом случае для функции $v(r)$ не обязательно существует предел частного $v(r)/V(r)$ при $r \rightarrow \infty$, но при этом существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rV(r)} \int_0^r v(t) dt. \quad (4.10)$$

Доказательства высказанных здесь утверждений о функции $v(z)$, можно найти в [18].

Утверждение о существовании предела (4.10) для функции $v(r)$ не следует из доказанных нами теорем. Далее будет доказана теорема, из которой будет следовать это утверждение. Следовательно, мы получим результат сравнимый по силе с результатами, полученными в теории субгармонических функций, но справедливыми для ядер значительно более общих, чем ядро $\ln \left| 1 - \frac{r}{t} \right|$, которое участвует в определении функции $v(r)$. Отметим ещё, что, как показывают теорема 4.2 и сформулированные свойства функции $v(r)$, в случае разрывных ядер предельное множество $Fr[\mu]$ меры μ не определяет асимптотическое поведение функции Ψ . Однако, как мы увидим далее, это множество определяет предельное множество меры s . Как уже отмечалось во вступлении, формулируемая ниже теорема – один из главных результатов работы.

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}(\rho(r))$. Пусть $K(t)$ – борелевская функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что $t^{\rho-1}\gamma(t)K(t) \in L_1(0, \infty)$ ($\rho = \rho(\infty)$). Тогда мера s , $ds(u) = \Psi(u)du$, Ψ – функция, определяемая равенством (1.2), принадлежит классу $\mathfrak{M}(\rho(r) + 1)$ и её предельное множество $Fr[\rho(r) + 1, s]$ состоит из абсолютно непрерывных мер, множество плотностей которых совпадает с множеством

$$\left\{ \int_0^{\infty} K\left(\frac{t}{u}\right) d\nu(t) : \nu \in Fr[\mu] \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем теорему при дополнительном предположении, что $\rho > 0$. Пусть $\mu(t)$, $\hat{\mu}(t)$ – функции распределения мер μ и $|\mu|$, нормированные условиями $\mu(0) = \hat{\mu}(0) = 0$. Так как $\mu \in \mathfrak{M}(\rho(r))$, то существует постоянная A_1 такая, что на полуоси $(0, \infty)$ выполняется неравенство $|\mu|([r, er]) \leq A_1 V(r)$. В случае $\rho > 0$ отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |\mu|((0, r]) &= \sum_{n=-\infty}^0 |\mu|((e^{n-1}r, e^n r]) \leq A_1 \sum_{n=-\infty}^0 V(e^{n-1}r) \\ &= A_1 \sum_{n=-\infty}^0 \int_{e^{n-1}r}^{e^n r} \frac{V(e^{n-1}r)}{V(t)} \frac{V(t)}{t} dt \leq A_1 \max_{[\frac{1}{e}, 1]} \gamma(t) \sum_{n=-\infty}^0 \int_{e^{n-1}r}^{e^n r} \frac{V(t)}{t} dt = A_2 \int_0^r \frac{V(t)}{t} dt \\ &= A_2 \int_0^1 \frac{V(ur)}{u} du \leq A_2 \int_0^1 \frac{u^\rho \gamma(u) V(r)}{u} du = AV(r). \end{aligned} \quad (4.11)$$

В приведенных оценках использовалось неравенство (2.15). Далее имеем

$$\begin{aligned} |s|([R, eR]) &= \int_R^{eR} |\Psi(r)| dr \leq \int_R^{eR} \int_0^\infty \left| K\left(\frac{t}{r}\right) \right| d|\mu|(t) dr \\ &= \int_0^\infty \int_R^{eR} \left| K\left(\frac{t}{r}\right) \right| dr d\hat{\mu}(t) = \int_0^\infty t \int_{\frac{t}{eR}}^{\frac{t}{R}} \frac{1}{u^2} |K(u)| du d\hat{\mu}(t). \end{aligned}$$

Формула интегрирования по частям даёт

$$\begin{aligned} |s|([R, eR]) &\leq \left\{ t \int_{\frac{t}{eR}}^{\frac{t}{R}} \frac{1}{u^2} |K(u)| du \hat{\mu}(t) \right\} \Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \int_{\frac{t}{eR}}^{\frac{t}{R}} \frac{1}{u^2} |K(u)| du \hat{\mu}(t) dt \\ &\quad - R \int_0^\infty \frac{1}{t} \left| K\left(\frac{t}{R}\right) \right| \hat{\mu}(t) dt + eR \int_0^\infty \frac{1}{t} \left| K\left(\frac{t}{eR}\right) \right| \hat{\mu}(t) dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Нам нужно оценить положительные слагаемые, входящие в правую часть неравенства (4.12). Мы будем использовать неравенство (2.15). Замечаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\frac{t}{eR}}^{\frac{t}{R}} \frac{1}{u^2} |K(u)| du &= \frac{1}{\frac{t}{R} V\left(\frac{t}{R}\right)} \int_{\frac{t}{eR}}^{\frac{t}{R}} \frac{\frac{t}{R} V\left(\frac{t}{R}\right)}{u V(u)} |K(u)| \frac{V(u)}{u} du \\ &\leq \frac{1}{\frac{t}{R} V\left(\frac{t}{R}\right)} \int_{\frac{t}{eR}}^{\frac{t}{R}} \left(\frac{t}{Ru}\right)^{\rho+1} \gamma\left(\frac{t}{Ru}\right) |K(u)| \frac{V(u)}{u} du \leq \frac{e^{\rho+1}}{\frac{t}{R} V\left(\frac{t}{R}\right)} \hat{\gamma} \int_{\frac{t}{eR}}^{\frac{t}{R}} |K(u)| \frac{V(u)}{u} du, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\hat{\gamma} = \max\{\gamma(x) : x \in [1, e]\}$. Из неравенства $V(t) \leq t^\rho \gamma(t)$ и условия $t^{\rho-1} \gamma(t) K(t) \in L_1(0, \infty)$ следует, что $\frac{V(t)}{t} K(t) \in L_1(0, \infty)$. Теперь из неравенства (4.13) следует, что внеинтегральный член в неравенстве (4.12) равен нулю.

Оцениваем четвёртый член из правой части неравенства (4.12).

$$\begin{aligned} eR \int_0^\infty \frac{1}{t} \left| K\left(\frac{t}{eR}\right) \right| \hat{\mu}(t) dt &\leq AeR \int_0^\infty \frac{1}{t} \left| K\left(\frac{t}{eR}\right) \right| V(t) dt \\ &= AeR \int_0^\infty \frac{1}{u} |K(u)| V(eRu) du \leq AeRV(eR) \int_0^\infty u^{\rho-1} \gamma(u) |K(u)| du. \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что при $R > 0$ справедлива оценка

$$|s|([R, eR]) \leq A \int_0^\infty u^{\rho-1} \gamma(u) |K(u)| du eRV(eR).$$

Это означает, что $s \in \mathfrak{M}(\rho(r) + 1)$.

Пусть $\varphi \in \Phi$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{rV(r)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u}{r}\right) ds(u) &= \frac{1}{rV(r)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u}{r}\right) \Psi(u) du = \frac{1}{rV(r)} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u}{r}\right) K\left(\frac{t}{u}\right) d\mu(t) du \\ &= \frac{1}{rV(r)} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u}{r}\right) K\left(\frac{t}{u}\right) dud\mu(t) = \frac{1}{rV(r)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{t}{xr}\right) K(x) dx d\mu(t) \\ &= \frac{1}{rV(r)} \int_0^\infty \frac{1}{x^2} K(x) \int_0^\infty t \varphi\left(\frac{t}{xr}\right) d\mu(t) dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из предыдущих рассуждений легко следует, что все интегралы, встречающиеся в формуле (4.14) являются абсолютно сходящимися. Это оправдывает перестановки порядка интегрирования, которые встречались при выводе формулы (4.14).

Пусть теперь $r_n \rightarrow \infty$ такая последовательность, что $\mu_{r_n} \rightarrow \nu$. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n V(r_n)} \int_0^\infty t \varphi\left(\frac{t}{xr_n}\right) d\mu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty u \varphi\left(\frac{u}{x}\right) d\mu_{r_n}(u) = \int_0^\infty u \varphi\left(\frac{u}{x}\right) d\nu(u).$$

Пусть $\text{supp } \varphi \subset [a, b] \subset (0, \infty)$. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{r_n V(r_n)} \int_0^\infty t \varphi\left(\frac{t}{xr_n}\right) d\mu(t) \right| &\leq \frac{bx}{V(r_n)} \|\varphi\| \hat{\mu}(bxr_n) \leq \frac{Ab\|\varphi\|x}{V(r_n)} V(bxr_n) \\ &\leq A\|\varphi\|(bx)^{\rho+1} \gamma(bx) \leq A\|\varphi\|b^{\rho+1} \gamma(b)x^{\rho+1} \gamma(x). \end{aligned}$$

Мы воспользовались оценкой $\gamma(bx) \leq \gamma(b)\gamma(x)$. Из полученной оценки следует, что

$$\left| \frac{1}{x^2} K(x) \frac{1}{r_n V(r_n)} \int_0^\infty t \varphi \left(\frac{t}{x r_n} \right) d\mu(t) \right| \leq A \|\varphi\| b^{\rho+1} \gamma(b) x^{\rho-1} \gamma(x) |K(x)|.$$

Теперь из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n V(r_n)} \int_0^\infty \frac{1}{x^2} K(x) \int_0^\infty t \varphi \left(\frac{t}{x r_n} \right) d\mu(t) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2} K(x) \int_0^\infty u \varphi \left(\frac{u}{x} \right) d\nu(u) dx = \int_0^\infty u \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \varphi \left(\frac{u}{x} \right) K(x) dx d\nu(u) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty K \left(\frac{u}{t} \right) \varphi(t) dt d\nu(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty K \left(\frac{u}{t} \right) d\nu(u) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Подставляя в равенство (4.14) $r = r_n$ и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(t) ds_{r_n}(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty K \left(\frac{u}{t} \right) d\nu(u) \varphi(t) dt.$$

Это означает, что последовательность мер s_{r_n} является сходящейся, и её предел есть абсолютно непрерывная мера с плотностью $\int_0^\infty K \left(\frac{u}{t} \right) d\nu(u)$. Этим доказано, что множество $Fr[s]$ содержит все абсолютно непрерывные меры с плотностями вида $\int_0^\infty K \left(\frac{u}{t} \right) d\nu(u)$, где $\nu \in Fr[\mu]$.

Пусть теперь ν_1 – произвольная мера из $Fr[s]$ и $R_n \rightarrow \infty$ такая последовательность, что $s_{R_n} \rightarrow \nu_1$. Возьмём в равенстве (4.14) $r = R_n$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mu_{R_n} \rightarrow \nu \in Fr[\mu]$. Тогда проведенное доказательство показывает, что мера ν_1 является абсолютно непрерывной и её плотность равна $\int_0^\infty K \left(\frac{u}{t} \right) d\nu(u)$.

Теорема для случая $\rho > 0$ доказана.

Пусть теперь $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, $\rho = \rho(\infty)$. Пусть p – такое вещественное число, что $\rho_1 = \rho + p > 0$. Обозначим $\rho_1(r) = \rho(r) + p$. Наряду с равенством

$$\Psi(r) = \int_0^\infty K \left(\frac{t}{r} \right) d\mu(t)$$

имеет место равенство

$$\Psi_1(r) = r^p \Psi(r) = \int_0^\infty \left(\frac{r}{t} \right)^p K \left(\frac{t}{r} \right) t^p d\mu(t) = \int_0^\infty K_1 \left(\frac{t}{r} \right) d\mu_1(t),$$

где $K_1(t) = t^{-p}K(t)$, $d\mu_1(t) = t^p d\mu(t)$. Имеем

$$t^{\rho_1-1}\gamma(t)K_1(t) = t^{\rho+p-1}\gamma(t)t^{-p}K(t) = t^{\rho-1}\gamma(t)K(t).$$

Далее с помощью теоремы 3.9 легко проверить, что для уточнённого порядка $\rho_1(r)$, ядра K_1 и мер μ_1 и s_1 , $ds_1(t) = \Psi_1(t)dt$, выполняются все условия теоремы 4.8 и, кроме того, выполняется условие $\rho_1 > 0$. По доказанному множество $Fr[s_1]$ состоит из абсолютно непрерывных мер, множество плотностей которых имеет вид

$$\left\{ \int_0^\infty K_1\left(\frac{u}{t}\right) d\nu_1(t) : \nu_1 \in Fr[\mu_1] \right\}.$$

Теперь из теоремы 3.9 легко следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

В теореме 4.5 описывается поведение функции

$$\Psi(r) = \int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t) \quad (4.15)$$

в окрестности бесконечности в терминах предельного множества $Fr[\mu]$ меры μ . Возможности этой теоремы ограничиваются возможностями доказать, что тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности.

Однако, существуют и другие препятствия для изучения свойств функции $\Psi(r)$. Мы подробно рассмотрим случай, когда K – финитное бесконечно дифференцируемое ядро на полуоси $(0, \infty)$. Это очень сильное ограничение на ядро K . В частности, для такого ядра K тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности для любого уточнённого порядка $\rho(r)$ и любой радоновой меры на полуоси $(0, \infty)$.

Пусть K – финитное бесконечно дифференцируемое ядро на полуоси $(0, \infty)$, μ – радонова мера на этой полуоси. Заметим, что бесконечная дифференцируемость ядра K , его финитность и формула интегрирования по частям позволяют написать бесконечное число равенств

$$(-1)^{n+1} r^{n+1} \Psi(r) = \int_0^\infty K^{(n+1)}\left(\frac{t}{r}\right) F_n(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.16)$$

где $F_0(t) = \mu(t)$ – функция распределения меры μ , $F'_{n+1}(t) = F_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$

Вопрос заключается в следующем. Позволяют ли равенства (4.16) и теорема 4.1 определить порядок роста функции $\Psi(r)$ на бесконечности? Как мы увидим далее, ответ следующий. Предложенный метод во многих случаях позволяет определить порядок роста функции $\Psi(r)$ на бесконечности. Однако, имеются исключения.

Пусть радонова мера μ_1 на полуоси $(0, \infty)$ сосредоточена на полуинтервале $(0, 1]$, K – финитное на полуоси $(0, \infty)$ ядро,

$$u(r) = \int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu_1(t).$$

Тогда функция $u(r)$ равна нулю в некоторой окрестности бесконечности. Поэтому если мы решаем задачу о поведении функции $\Psi(r)$, задаваемой равенством (4.15) в окрестности бесконечности, то, без ограничения общности, можно считать, что мера μ в формуле (4.15) сосредоточена на полуоси $(1, \infty)$. Это условие в дальнейшем мы будем считать выполненным. В этом случае функция $F_0(t)$ будет ограничена на любом интервале $(0, N)$, а все функции $F_k(t)$, $k \geq 1$, можно считать непрерывными на полуоси $[0, \infty)$. Во всяком случае, можно считать, что все функции $F_k(t)$ являются локально интегрируемыми на полуоси $(0, \infty)$ и для любого $k \geq 0$ существует интеграл $\int_0^1 F_k(t) dt$.

Пусть функция $f(t)$ локально интегрируема на полуоси $(0, \infty)$ и существует интеграл $\int_0^1 f(t) dt$ хотя бы в несобственном смысле. Функцию $F(t)$, определяемую равенством $F(t) = - \int_t^\infty f(x) dx$, если написанный интеграл сходится и равенством

$F(t) = \int_0^t f(x) dx$ в противном случае, будем называть *канонической первообразной* функции f на полуоси $(0, \infty)$. Каноническая первообразная F определяется по функции f однозначно. Для любой локально интегрируемой функции f на полуоси $(0, \infty)$ существует первообразная F , однако каноническая первообразная существует не всегда. Например, у функции $f(t) = \frac{1}{t}$ нет канонической первообразной на полуоси $(0, \infty)$.

Функцию $F_0(t)$ в формуле (4.16) однозначно определяем следующим образом. $F_0(t) = -\mu((t, \infty))$, если $F_0(t)$ конечная величина (напомним, что μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$, и поэтому величина $\mu(E)$ определена не для любого борелевского множества $E \subset (0, \infty)$). В противном случае полагаем, что $F_0(t) = \mu((0, t])$. Эта величина всегда имеет смысл из-за предположения, что мера μ сосредоточена на полуоси $[1, \infty)$. Далее функцию $F_{n+1}(t)$ определяем как каноническую первообразную функции $F_n(t)$. Теперь в формуле (4.16) последовательность $F_n(t)$ является однозначно определённой.

В разделе 2 порядок и уточнённый порядок определялись для положительных функций. Распространим эти определения на комплекснозначные функции.

Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция на полуоси $(0, \infty)$. Порядок ρ функции f определяется по формуле

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(r)|}{\ln r}.$$

Если ρ – вещественное число, то функция f называется функцией *конечного порядка* ρ .

Уточнённый порядок $\rho(r)$ будем называть *уточнённым порядком* функции $f(r)$, если $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|f(r)|}{V(r)} = \sigma \in (0, \infty)$. Если $\rho(r)$ – уточнённый порядок функции $f(r)$, то будем говорить, что функция $f(r)$ растёт на бесконечности как функция $V(r)$.

Из теоремы 2.2 следует, что если функция $f(r)$ имеет конечный порядок, то у неё есть уточнённый порядок $\rho(r)$ (конечно, таких порядков существует бесконечное число).

Во многих задачах, в частности, в связи с формулой (4.16) возникает вопрос об оценках первообразной F функции f . Остановимся на этом подробнее.

ЛЕММА 4.5. Пусть f – локально интегрируемая функция конечного порядка на полуоси $(0, \infty)$ и такая, что существует интеграл $\int_0^1 f(t)dt$. Пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок функции f , F – каноническая первообразная функции f . Тогда существуют постоянные M_k и r_0 такие, что

- 1) $|F(r + \alpha r) - F(r)| \leq M_1 \alpha r V(r), \quad r \geq r_0, \quad \alpha \in [0, 1];$
- 2) $|F(r)| \leq M_2 \left(1 + \int_1^r V(t)dt\right), \quad r \geq 1;$
- 3) $|F(r)| \leq M_3 \int_1^\infty V(t)dt, \quad r \geq 1;$
- 4) $|F(r)| \leq M_4 r V(r), \quad r \geq 1, \text{ если } \rho = \rho(\infty) \neq -1;$
- 5) порядки $\rho(f), \rho(F)$ функций f и F удовлетворяют неравенству $\rho(F) \leq \rho(f) + 1$.

Заметим, что если интеграл $\int_1^\infty V(t)dt$ расходится, то неравенство 3) есть тривиальное неравенство $|F(r)| \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ – тип функции f относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Тогда для всех достаточно больших r и $\alpha \in [0, 1]$ будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} |F(r + \alpha r) - F(r)| &= \left| \int_r^{(1+\alpha)r} f(t)dt \right| \leq 2\sigma \int_r^{(1+\alpha)r} V(t)dt = 2\sigma r \int_1^{1+\alpha} V(ur)du \\ &\leq 2\sigma r V(r) \int_1^{1+\alpha} u^\rho \gamma(u)du \leq 2\sigma \gamma_1 \alpha r V(r), \end{aligned}$$

где $\gamma_1 = \max\{u^\rho \gamma(u) : u \in [1, 2]\}$. Тем самым утверждение 1) доказано. Утверждения 2)-4) легко следуют из утверждения 1) и свойств уточнённого порядка. Действительно, проверим, например, утверждение 2). Пусть $r \geq 2r_0$. Определим число n_0 из условия $2^{-n_0}r \in [r_0, 2r_0)$. Обозначим $r_1 = 2^{-n_0}r$. Имеем

$$\begin{aligned} |F(r)| &= \left| F(r_1) + \sum_{n=1}^{n_0} (F(2^n r_1) - F(2^{n-1} r_1)) \right| \\ &\leq |F(r_1)| + M_1 \sum_{n=1}^{n_0} 2^{n-1} r_1 V(2^{n-1} r_1) = |F(r_1)| + M_1 \sum_{n=1}^{n_0} \int_{2^{n-1} r_1}^{2^n r_1} V(2^{n-1} r_1) dt \\ &\leq |F(r_1)| + M_5 \sum_{n=1}^{n_0} \int_{2^{n-1} r_1}^{2^n r_1} V(t)dt = |F(r_1)| + M_5 \int_{r_1}^r V(t)dt. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует утверждение 2). Неравенство $\rho(F) \leq \rho(f) + 1$ легко следует из утверждения 4), если $\rho \neq -1$, и утверждения 2), если $\rho = -1$. Лемма доказана.

Лемма 4.5 служит мотивацией для введения следующего определения.

Пусть $f(r)$ – локально интегрируемая функция конечного порядка на полуоси $(0, \infty)$, существует интеграл $\int_0^1 f(t)dt$ и $F(r)$ – каноническая первообразная функции f на полуоси $(0, \infty)$.

Уточнённый порядок $\rho(r)$ функции f называется *устойчивым уточнённым порядком* функции f , если $\rho = \rho(\infty) \neq -1$ и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{|F(r)|}{rV(r)} > 0.$$

Заметим, что функции $\cos r$, $\sin r$, e^{ir} не имеют устойчивого уточнённого порядка.

ТЕОРЕМА 4.9. Пусть $f(r)$ – локально интегрируемая функция конечного порядка на полуоси $(0, \infty)$, существует интеграл $\int_0^1 f(t)dt$ и $F(r)$ – каноническая первообразная функции f на полуоси $(0, \infty)$. Пусть $\rho(r)$, $\rho(\infty) \neq -1, -2, \dots$ – устойчивый уточнённый порядок функции f . Тогда уточнённый порядок $\rho(r) + 1$ будет устойчивым уточнённым порядком функции F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения устойчивого уточнённого порядка и утверждения 4) леммы 4.5 следует, что уточнённый порядок $\rho(r) + 1$ будет уточнённым порядком функции F . Осталось доказать, что это устойчивый уточнённый порядок функции F . Если это не так, то, как следует из леммы 4.5 и определения устойчивого уточнённого порядка, имеет место равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F_1(r)}{r^2 V(r)} = 0, \quad (4.17)$$

где $F_1(r)$ – каноническая первообразная функции $F(r)$ на полуоси $(0, \infty)$.

Предположим вначале, что выполняется неравенство $\rho(\infty) > -2$. Покажем, что в этом случае интеграл $\int_r^\infty F(t)dt$ расходится. Так как $\rho(r) + 1$ – уточнённый порядок функции F , то можно считать, что существуют число $m > 0$ и последовательность $r_n \rightarrow \infty$ такие, что $\Re F(r_n) \geq 2mr_n V(r_n)$. Этого можно добиться, заменяя в случае необходимости функцию f на $-f$ или на $\pm if$. Из утверждения 1) леммы 4.5 следует, что существует $\alpha_0 > 0$ такое, что для всех достаточно больших n и для всех $r \in [r_n, (1 + \alpha_0)r_n]$ будет выполняться неравенство $\Re F(r) \geq mr_n V(r_n)$. Тогда

$$\left| \int_{r_n}^{(1+\alpha_0)r_n} F(t)dt \right| \geq \left| \int_{r_n}^{(1+\alpha_0)r_n} \Re F(t)dt \right| = \int_{r_n}^{(1+\alpha_0)r_n} \Re F(t)dt \geq m\alpha_0 r_n^2 V(r_n).$$

Так как $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 V(r) = \infty$, то по критерию Коши интеграл $\int_r^\infty F(t) dt$ расходится. Поэтому, согласно определению канонической первообразной, равенство (4.17) имеет вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2 V(r)} \int_0^r F(t) dt = 0. \quad (4.18)$$

Функция $g(r)$ называется *медленно меняющейся* относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, если

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \alpha \rightarrow 0}} \frac{g(r + \alpha r) - g(r)}{V(r)} = 0.$$

Из утверждения 1) леммы 4.5 следует, что функция $F(r)$ является медленно меняющейся относительно уточнённого порядка $\rho(r) + 1$.

Следствием теоремы 2 [19] является следующее утверждение.

Пусть функция g является медленно меняющейся относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, причём $\rho(\infty) > -1$. Тогда, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r V(r)} \int_0^r g(t) dt = a,$$

то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{g(r)}{V(r)} = a(\rho + 1).$$

Следствием сформулированного утверждения и равенства (4.17) является равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F(r)}{r V(r)} = 0. \quad (4.19)$$

Это противоречит тому, что $\rho(r)$ – устойчивый уточнённый порядок функции f .

Таким образом равенство (4.17) ведёт к противоречию, и теорема доказана для случая, когда $\rho(\infty) > -2$. Предположим теперь, что $\rho(\infty) < -2$. В этом случае равенство (4.17) записывается в виде

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2 V(r)} \int_r^\infty F(t) dt = 0.$$

Теперь дополнительное утверждение для обоснования равенства (4.19) выглядит так.

Пусть функция g является медленно меняющейся функцией относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, причём $\rho(\infty) < -1$. Тогда, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r V(r)} \int_r^\infty g(t) dt = a,$$

то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{g(r)}{V(r)} = -a(\rho + 1).$$

Это утверждение также следует из результатов работы [19]. Тем самым мы доказали, что и в случае $\rho(\infty) < -2$ из равенства (4.17) следует равенство (4.19), которое противоречит условиям теоремы. Таким образом, предположение о том, что $\rho(r) + 1$ не является устойчивым уточнённым порядком функции $F(r)$, приводит к противоречию. Теорема доказана.

Доказанная теорема достаточно своеобразна. Её можно трактовать, как теорему о стабилизации свойства функции иметь устойчивый уточнённый порядок при последовательном интегрировании. Пусть $F_k(r)$ – последовательные канонические первообразные на полуоси $(0, \infty)$ функции $f(r)$. Из доказанной теоремы следует, что если функция $F_k(r)$ имеет устойчивый уточнённый порядок $\rho_k(r)$ и если $\rho_k(\infty)$ не является целым строго отрицательным числом, то для любого $m \geq 1$ уточнённый порядок $\rho_k(r) + m$ будет устойчивым уточнённым порядком функции $F_{k+m}(r)$.

ТЕОРЕМА 4.10. Пусть f – локально интегрируемая функция конечного порядка на полуоси $(0, \infty)$ и существует интеграл $\int_0^1 f(t)dt$. Пусть функция f не имеет устойчивого уточнённого порядка и пусть $\rho(r)$ – уточнённый порядок функции f , причём $\rho(\infty) \neq -1$. Пусть λ – мера с плотностью $f(t)$. Тогда $\lambda \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r) + 1)$, $Fr[\rho(r) + 1, \lambda] = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что $\rho(r)$ является уточнённым порядком функции $f(r)$, следует, что $\lambda \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r) + 1)$. Пусть F – каноническая первообразная функции f на полуоси $(0, \infty)$. Так как функция f не имеет устойчивого уточнённого порядка, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F(r)}{rV(r)} = 0. \quad (4.20)$$

Пусть φ – произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция на полуоси $(0, \infty)$ и пусть $\text{supp } \varphi \subset [a, b] \subset (0, \infty)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{rV(r)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{t}{r}\right) d\lambda(t) &= \frac{1}{rV(r)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{t}{r}\right) f(t)dt \\ &= -\frac{1}{r^2V(r)} \int_0^\infty \varphi'\left(\frac{t}{r}\right) F(t)dt = -\frac{1}{rV(r)} \int_a^b \varphi'(u) F(ur)du. \end{aligned}$$

Из полученного равенства и (4.20) следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rV(r)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{t}{r}\right) d\lambda(t) = 0. \quad (4.21)$$

Пусть теперь ν – произвольная мера из множества $Fr[\lambda]$. Существует последовательность $r_n \rightarrow \infty$ такая, что $\lambda_{r_n} \rightarrow \nu$. Взяв в равенстве (4.21) $r = r_n$, получим,

что $\int_0^\infty \varphi(u) d\nu(u) = 0$. Поэтому по теореме 3.7 $\nu = 0$, а значит $Fr[\lambda] = \{0\}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть f – локально интегрируемая функция конечного порядка на полуоси $(0, \infty)$, существует интеграл $\int_0^1 f(t) dt$ и F – каноническая первообразная функция f на полуоси $(0, \infty)$. Пусть функция f не имеет устойчивого уточнённого порядка, а $\rho(r)$ – уточнённый порядок функции f , причём $\rho(\infty) \neq -1$. Тогда, если порядок F не равен $-\infty$, то существует уточнённый порядок $\rho_1(r)$ этой функции такой, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_1(r)}{rV(r)} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно, если порядок функции F удовлетворяет неравенству $\rho_1 < \rho(\infty) + 1$. Поэтому будем считать, что $\rho_1 = \rho(\infty) + 1$. Так как функция f не имеет устойчивого уточнённого порядка, то выполняется равенство (4.20). Из этого и теоремы 5 [9] следует, что существует уточнённый порядок $\rho_2(r)$ такой, что выполняются равенства

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F(r)}{V_2(r)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_2(r)}{rV(r)} = 0.$$

Функция $F_1(r) = \frac{F(r)}{V_2(r)}$ является функцией нулевого порядка, имеющей нулевой предел на бесконечности. По теореме 2.1 у неё есть уточнённый порядок $\rho_3(r)$, который возрастает на полуоси $(1, \infty)$, причём $\rho_3(\infty) = 0$ (случай $\rho_3(r) \equiv 0$ не исключается). Тогда уточнённый порядок $\rho_1(r) = \rho_2(r) + \rho_3(r)$ будет уточнённым порядком функции $F(r)$. Имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_2(r)V_3(r)}{rV(r)} = 0.$$

Таким образом $\rho_1(r)$ – это искомый уточнённый порядок. Теорема доказана.

Теперь возвратимся к вопросу об определении порядка роста функции $\Psi(r)$, определяемой равенством (4.15). Если $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho(r))$, то по теореме 4.1 множество $L(J, \infty)$ имеет вид

$$L(J, \infty) = \left\{ \int_0^\infty K(u) d\nu(u) : \nu \in Fr[\mu] \right\}.$$

Если $L(J, \infty) \neq \{0\}$, то функция Ψ растёт на бесконечности как функция $V(r)$. Если же $L(J, \infty) = \{0\}$, то мы имеем соотношение $\Psi(r) = o(V(r))$, которое не определяет порядок роста функции $\Psi(r)$ на бесконечности.

Равенство $L(J, \infty) = \{0\}$ может выполняться по различным причинам. Рассмотрим вначале случай, когда $Fr[\mu] \neq \{0\}$, однако ядро K таково, что для любой меры $\nu \in Fr[\mu]$ выполняется равенство $\int_0^\infty K(u) d\nu(u) = 0$. Мы имеем случай, когда теорема 4.1 не позволяет определять порядок роста функции $\Psi(r)$ на бесконечности.

Например, возможен вариант $Fr[\mu] = \{u^{\rho-1}du\}$, $\int_0^\infty K(u)u^{\rho-1}du = 0$. В этом случае не только наш метод не даёт ответа на вопрос о порядке роста функции $\Psi(r)$ на бесконечности, но вообще имеющейся информации о ядре K и мере μ (мы знаем, что выполняется соотношение $\int_0^\infty K(u)d\nu(u) = 0$ для $\nu \in Fr[\mu]$) недостаточно для определения порядка роста функции Ψ на бесконечности. В этом случае для определения порядка роста функции Ψ нужна дополнительная информация и сложность задачи по определению порядка роста функции Ψ зависит от этой информации. В частном случае $d\mu(t) = t^{\rho-1}dt$ имеем $\Psi(r) \equiv 0$.

Рассмотрим теперь случай $Fr[\mu] = \{0\}$. В этом случае равенства (4.16) можно использовать для улучшения оценки $\Psi(r) = o(V(r))$.

Пусть функция $F_m(t)$ имеет уточнённый порядок $\rho_m(r)$. Тогда мера λ_m , $d\lambda_m(t) = F_m(t)dt$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_\infty(\rho_m(r) + 1)$. Обозначим

$$H_m = \left\{ \int_0^\infty K^{(m+1)}(u)d\nu(u) : u \in Fr[\rho_m(r) + 1, \lambda_m] \right\}.$$

По теореме 4.1 предельное множество функции $(-1)^{m+1}r^{m+1}\Psi(r)/rV_m(r)$ по направлению $r \rightarrow \infty$ совпадает с H_m . Если $H_m \neq \{0\}$, то получим, что функция $\Psi(r)$ растёт на бесконечности как функция $\frac{V_m(r)}{r^m}$. Если же $H_m = \{0\}$, то получаем соотношение $\Psi(r) = o\left(\frac{V_m(r)}{r^m}\right)$.

Если $H_m = \{0\}$, $Fr[\lambda_m] \neq \{0\}$, то вновь получаем случай, когда теорема 4.1 не даёт ответа на вопрос о порядке роста функции $\Psi(r)$ на бесконечности.

Предположим теперь, что функция $F_m(r)$ не имеет устойчивого уточнённого порядка. В этом случае применение теорем 4.1 и 4.10 к функции $F_{m+1}(r)$ и уточнённому порядку $\rho_m(r) + 1$ даёт, что

$$\Psi(r) = o\left(\frac{V_m(r)}{r^m}\right).$$

Из теоремы 4.11 следует, что существует уточнённый порядок $\rho_{m+1}(r)$ функции $F_{m+1}(r)$ такой, что $V_{m+1}(r) = o(rV_m(r))$. Применение теоремы 4.1 к функции $F_{m+1}(r)$ и уточнённому порядку $\rho_{m+1}(r)$ даёт соотношение $\Psi(r) = O(r^{-m-1}V_{m+1}(r))$, которое сильнее соотношения $\Psi(r) = o(r^{-m}V_m(r))$.

Обозначим через ρ_n порядок функции $F_n(r)$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.12. Пусть $K(t)$ – финитное бесконечно дифференцируемое ядро, μ – радонова мера конечного порядка на полуоси $(0, \infty)$ не нагружающая полуинтервал $(0, 1]$. Пусть функция $\Psi(r)$ определяется равенством (4.15), а в равенстве (4.16) функции $F_n(t)$ однозначно определены с помощью предложенного ранее алгоритма. Пусть ρ_n – порядок функции F_n . Если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\rho_m - m) = -\infty,$$

то функция $\Psi(r)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 4.1, применённая к функции $F_m(r)$ и уточнённому порядку $\rho_m(r)$, даёт

$$\Psi(r) = O\left(\frac{V_m(r)}{r^m}\right).$$

Из этого следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Возможен случай, что для некоторого n выполняется равенство $\rho_n = -\infty$ (например, если $d\mu(t) = te^{ie^t} dt$). В этом случае из равенства (4.16) и теоремы 4.1 следует, что функция $\Psi(r)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени r .

Рассмотрим теперь случай, когда выполняется неравенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\rho_m - m) > -\infty. \quad (4.22)$$

Из неравенства $\rho_{n+1} \leq \rho_n + 1$, доказанного в лемме 4.5, следует, что $\rho_{n+1} = \rho_n + 1 - \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \geq 0$. Из неравенства (4.22) следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n$ сходится. Из этого, в свою очередь, следует сходимость последовательности $\rho_n - n$. В этом случае имеем $\rho_n = n + p + \delta_n$, где $\delta_n \rightarrow 0$, $\rho_n > 0$ при $n > n_0$. Если существует $m > n_0$ такое, что функция $F_m(r)$ имеет устойчивый уточнённый порядок $\rho_m(r)$, то из теоремы 4.9 следует, что для любого $k \geq 0$ функция $F_{m+k}(r)$ будет иметь устойчивый уточнённый порядок $\rho_{m+k}(r) = \rho_m(r) + k$. В этом случае мы получим, что либо функция $\Psi(r)$ растёт на бесконечности как функция $\frac{V_m(r)}{r^m}$, если $E_m \neq \{0\}$, либо, если $E_m = \{0\}$, то кроме соотношения $\Psi(r) = o\left(\frac{V_m(r)}{r^m}\right)$ предложенный метод ничего не даёт.

Если же для любого $m > n_0$ функция $F_m(r)$ не имеет устойчивого уточнённого порядка, то в этом случае, как это следует из теоремы 4.11, уточнённые порядки $\rho_m(r)$ функций $F_m(r)$ можно выбрать таким образом, что соотношение $\Psi(r) = o\left(\frac{V_{m+1}(r)}{r^{m+1}}\right)$ будет уточнять предыдущее $\Psi(r) = o\left(\frac{V_m(r)}{r^m}\right)$. Ничего большего в этом случае предложенный метод не даёт.

Мы обсудили возможности метода для случая финитного бесконечно дифференцируемого ядра K . При определённых условиях эти результаты можно распространить на нефинитные ядра.

В теореме 4.5 требуется, чтобы тройка $(K, \rho(r), \mu)$ удовлетворяла условиям нейтрализации нуля и бесконечности. Существуют теоремы об асимптотическом поведении функции Ψ и для случаев, когда это условие нарушается.

ТЕОРЕМА 4.13. Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, $\mu \in \mathfrak{M}(\rho(r))$, причём существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu([\varepsilon, 1]) = \mu((0, 1])$. Пусть $K(t)$ – непрерывная функция на полупоси $[0, \infty)$, $K_1(t) = K(t) - K(0)\chi_{[0,1]}(t)$ и, кроме того, пусть тройка $(K_1, \rho(r), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности. Тогда выполняется соотношение

$$\int_0^{\infty} K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t) = K(0)\mu((0, r]) + \varphi(r),$$

причём предельное множество функции $\frac{\varphi(r)}{V(r)}$ по направлению $r \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\left\{ \int_0^1 (K(t) - K(0)) d\nu_1(t) + \int_1^\infty K(t) d\nu_2(t) : (\nu_1, \nu_2) \in \widehat{Fr}(\mu) \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t) = K(0)\mu([0, r]) + \int_0^\infty K_1\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t).$$

Для функции K_1 и меры μ выполняются все условия теоремы 4.6, применение которой заканчивает доказательство. Теорема доказана.

Во многих теоремах в качестве исходной посылки выступает соотношение

$$\Psi(r) = \int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t) \sim MV(r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

При определённых ограничениях на функцию K и меру μ функция $\Psi(r)$ имеет вид $\Psi(r) = r^{\rho_1(r)}$, где $\rho_1(r)$ – уточнённый порядок.

ТЕОРЕМА 4.14. Пусть $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, μ – положительная локально конечная мера на полуоси $(0, \infty)$, $K(t)$ – непрерывно дифференцируемая строго убывающая функция на полуоси $(0, \infty)$ и такая, что тройка $(tK'(t), \rho(t), \mu)$ удовлетворяет условиям нейтрализации нуля и бесконечности. Пусть выполняется соотношение (4.23) и пусть производная $\Psi'(r)$ вычисляется по правилу Лейбница

$$\Psi'(r) = -\frac{1}{r^2} \int_0^\infty tK'\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t).$$

Тогда, если функцию $\rho_1(r)$ определить равенствами $r^{\rho_1(r)} = \Psi(r)$ при $r \geq 1$, $\rho_1\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho_1(r)$, то $\rho_1(r)$ – нулевой уточнённый порядок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что равенство $\rho_1\left(\frac{1}{r}\right) = -\rho_1(r)$ входит в наше определение нулевого уточнённого порядка. Имеем

$$\begin{aligned} \Psi(2r) - \Psi(r) &= \int_0^\infty \left(K\left(\frac{t}{2r}\right) - K\left(\frac{t}{r}\right) \right) d\mu(t) \\ &\geq \int_r^{2r} \left(K\left(\frac{t}{2r}\right) - K\left(\frac{t}{r}\right) \right) d\mu(t) \geq m\mu([r, 2r]), \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $m = \min \left\{ K\left(\frac{u}{2}\right) - K(u) : u \in [1, 2] \right\} > 0$. Из этого неравенства и соотношения (4.23) следует, что $Fr[\rho(r), \mu] = \{0\}$.

Теперь из условий теоремы и теоремы 4.5 следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r\Psi'(r)}{V(r)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r\Psi'(r)}{\Psi(r)} = 0.$$

Если теперь $\rho_1(r)$ – функция из формулировки теоремы, то из доказанного следует, что $\rho_1(r)$ – нулевой уточнённый порядок. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Рассмотрим теорему 108 из книги Харди [6]. В ней утверждается, что если $\rho(r)$ – нулевой уточнённый порядок, а μ – положительная локально конечная мера на полуоси $[0, \infty)$, то соотношения

$$\Psi(r) = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{r}} d\mu(t) \sim V(r), \quad \mu([0, r]) \sim V(r) \quad (r \rightarrow \infty)$$

эквивалентны.

Посмотрим, что даёт в рассматриваемом случае применение доказанных нами теорем.

Из теоремы 4.14 следует, что функция $\Psi(r)$ представляется в виде $\Psi(r) = r^{\rho_1(r)} = V_1(r)$, где $\rho_1(r)$ – нулевой уточнённый порядок. Существует нулевой уточнённый порядок $\rho_2(r)$ такой, что выполняются соотношения

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{V_1(2r) - V_1(r)}{V_2(r)} < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_2(r)}{V_1(r)} = 0.$$

В качестве $\rho_2(r)$ проще всего взять функцию, определяемую равенством $r^{\rho_2(r)} = V_1(2r) - V_1(r)$, если такая функция является уточнённым порядком.

Имеем

$$\begin{aligned} V_1(2r) - V_1(r) &= \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2r}} \left(1 - e^{-\frac{t}{2r}}\right) d\mu(t) \\ &\geq \int_r^{2r} e^{-\frac{t}{2r}} \left(1 - e^{-\frac{t}{2r}}\right) d\mu(t) \geq e^{-1} (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \mu((r, 2r]). \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что $\mu \in \mathfrak{M}_\infty(\rho_2(r))$. Теперь, применяя теорему 4.6 ко второму слагаемому из правой части нижеследующего равенства

$$\Psi(r) = \mu([0, r]) + \int_0^\infty \left(e^{-\frac{t}{r}} - \chi_{[0, r]}(t)\right) d\mu(t),$$

получим, что

$$\mu([0, r]) = \Psi(r) + O(V_2(r)).$$

Это сильнее чем теорема 108.

5 Тауберовы теоремы для интегралов

Начнём со следующего определения.

Пусть μ – радонова мера на вещественной оси, удовлетворяющая условию $|\mu|([-t, t]) \leq M(1 + t^\alpha)$ с некоторым $\alpha \geq 0$. Преобразованием Карлемана меры μ называется пара функций $G(z) = (G_+(z), G_-(z))$, где

$$G_+(z) = \int_0^\infty e^{itz} d\mu(t), \quad \Im z > 0,$$

$$G_-(z) = - \int_{-\infty}^0 e^{itz} d\mu(t), \quad \Im z < 0.$$

Штрихи над знаками интегралов означают, что интегрирование по полуосям $[0, \infty)$, $(-\infty, 0]$ ведётся не по мере μ , а по мере $\mu - \frac{1}{2}\mu(\{0\})\delta$, где δ – мера Дирака (единичная мера, сосредоточенная в нуле). В случае, если $\mu(\{0\}) = 0$, штрихи можно опустить.

Очевидно, что $G(z)$ – локально голоморфная функция на множестве $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (\mathbb{C} – комплексная плоскость, \mathbb{R} – вещественная ось).

Наше изложение тауберовых теорем во многом опирается на следующую теорему об аналитическом продолжении.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $M > 0$ – фиксированное число, μ – радонова мера на вещественной оси такая, что $|\mu|([\alpha, \beta]) \leq M$, если $\beta - \alpha \leq 1$. Пусть борелевская функция $K(t)$ принадлежит классу $L_1(-\infty, \infty)$ и $\hat{K}(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty K(t)e^{-i\lambda t} dt \neq 0$ при $\lambda \in (a, b)$. Пусть

$$\int_{-\infty}^\infty K(t - u) d\mu(t) = 0, \quad u \in (-\infty, \infty), \quad (5.1)$$

$G(z) = (G_+(z), G_-(z))$ – преобразование Карлемана меры μ . Тогда выполняются следующие условия:

1)

$$|G(z)| \leq M \left(1 + \frac{1}{|y|} \right), \quad z = x + iy, \quad (5.2)$$

2) функция $G_+(z)$ допускает аналитическое продолжение через интервал (a, b) , и результатом аналитического продолжения является функция $G_-(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале мы докажем, что если $d - c = 1$, то существует число M_1 такое, что для любого $c \in (-\infty, \infty)$ будет выполняться неравенство

$$I(c, d) = \int_c^d \int_{-\infty}^\infty |K(t - u)| d|\mu|(t) du \leq M_1. \quad (5.3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} I(c, d) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_c^d |K(t-u)| du d|\mu|(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t-d}^{t-c} |K(\tau)| d\tau d|\mu|(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \int_{t-d}^{t-c} |K(\tau)| d\tau d|\mu|(t). \end{aligned}$$

По теореме о среднем значении для интегралов найдутся точки $t_n \in [n, n+1]$ такие, что будет выполняться равенство

$$I(c, d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t_n-d}^{t_n-c} |K(\tau)| d\tau \int_n^{n+1} d|\mu|(t).$$

В силу ограничений на меру μ отсюда следует, что

$$I(c, d) \leq M \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t_n-d}^{t_n-c} |K(\tau)| d\tau = M \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) |K(\tau)| d\tau,$$

где $a(\tau)$ – это число сегментов $[t_n - d, t_n - c]$, содержащих точку τ . Теперь из неравенства $a(\tau) \leq 3$ следует неравенство (5.3).

Далее будем оценивать функцию $G(z)$. Пусть $\check{\mu}(t)$ – функция распределения меры $|\mu|$, нормированная условием $\check{\mu}(0) = 0$. Из условий теоремы следует неравенство $|\check{\mu}(t)| \leq M(1 + |t|)$. Поэтому

$$|G_+(z)| \leq \int_0^{\infty} e^{-ty} d\check{\mu}(t) = e^{-ty} \check{\mu}(t) \Big|_0^{\infty} + y \int_0^{\infty} \check{\mu}(t) e^{-ty} dt.$$

Используя оценку для $\check{\mu}(t)$, находим, что $|G_+(z)| \leq M \left(1 + \frac{1}{y}\right)$. Аналогично оценивается $G_-(z)$. Тем самым, утверждение 1) доказано.

Обозначим $T_\varepsilon(t) = \left(\sin \frac{\varepsilon}{2} t / \frac{\varepsilon}{2} t\right)^2$ и определим меру μ_ε равенством $d\mu_\varepsilon(t) = T_\varepsilon(t) d\mu(t)$. Пусть $G^\varepsilon(z)$ – преобразование Карлемана меры μ_ε . Отметим, что мера μ_ε конечна и что вследствие неравенства $T_\varepsilon(t) \leq 1$ в неравенстве (5.2) функцию G можно заменить на G_ε .

Будем считать, что число ε достаточно малое, и пусть $[a_1, b_1]$ такой сегмент, что $a + \varepsilon < a_1 < b_1 < b - \varepsilon$. Пусть ξ – произвольная точка сегмента $[a_1, b_1]$. Найдём функцию $K_1 \in L_1(-\infty, \infty)$ такую, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(u) K(t-u) du = T_\varepsilon(t) e^{i\xi t}. \quad (5.4)$$

Допустим, что такая функция существует. Тогда выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(u) K(t-u) e^{-itx} du dt = \widehat{T}(\xi, x), \quad (5.5)$$

где

$$\hat{T}(\xi, x) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{\varepsilon}(t) e^{i\xi t} e^{-ixt} dt.$$

Известно, что интеграл в левой части равенства (5.5) сходится абсолютно. Поэтому в этом интеграле возможно изменение порядка интегрирования. Это даёт

$$\begin{aligned} \hat{T}(\xi, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(t-u) e^{-itx} dt K_1(u) du = \hat{K}(x) \hat{K}_1(x), \\ \hat{K}_1(x) &= \frac{\hat{T}(\varepsilon, x)}{\hat{K}(x)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Теперь, забывая о том, каким способом получено равенство (5.6), рассмотрим функцию $\hat{K}_1(x)$, определяемую этим равенством. Носитель функции $\hat{T}(\varepsilon, x)$ расположен на сегменте $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$, который является частью интервала (a, b) . На интервале (a, b) функция $\hat{K}(x)$ не обращается в ноль. Таким образом, функция $\hat{K}_1(x)$ корректно определена на сегменте $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$. Будем считать, что функция $\hat{K}_1(x)$ равна нулю вне этого сегмента. Тем самым $\hat{K}_1(x)$ – это непрерывная финитная функция.

Из теоремы Винера о делении следует, что если функция $\hat{K}_1(x)$ определяется равенством (5.6), то существует функция $K_1 \in L_1(-\infty, \infty)$ такая, что её преобразование Фурье совпадает с $\hat{K}_1(x)$. Теперь из равенства $\hat{K}_1(x) \hat{K}(x) = \hat{T}(\varepsilon, x)$ применением обратного преобразования Фурье получается равенство (5.4). Существование функции K_1 доказано.

Умножим обе части равенства (5.1) на $K_1(u)$ и проинтегрируем обе части полученного равенства по оси $(-\infty, \infty)$. Мы получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(u) K(t-u) d\mu(t) du = 0. \quad (5.7)$$

Будем оценивать следующий интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K_1(u)| |K(t-u)| du d|\mu|(t).$$

Имеем

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} |K_1(u)| |K(t-u)| du d|\mu|(t) \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \max\{|K_1(u)| : u \in [n, n+1]\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} |K(t-u)| du d|\mu|(t). \end{aligned}$$

Применяя неравенство (5.3), получим неравенство

$$I \leq M_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \max\{|K_1(u)| : u \in [n, n+1]\}.$$

Функция $K_1 \in L_1(-\infty, \infty)$ является преобразованием Фурье непрерывной финитной функции. Для таких функций, как следует из леммы 6₇ ([20], глава 2, §11), написанный выше ряд сходится. Таким образом, $I < \infty$. Теперь из теорем Тонелли и Фубини следует, что в интеграле, стоящем в левой части равенства (5.7), можно поменять порядок интегрирования. Это даёт с учётом равенства (5.4) такое равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} T_{\varepsilon}(t) d\mu(t) = 0, \quad \xi \in [a_1, b_1]. \quad (5.8)$$

Из конечности меры μ_{ε} следует, что функция $G_{+}^{\varepsilon}(z)$ является голоморфной функцией в верхней полуплоскости непрерывной вплоть до границы. Аналогично, функция $G_{-}^{\varepsilon}(z)$ является функцией голоморфной в нижней полуплоскости непрерывной вплоть до границы. Тогда равенство (5.8) можно переписать в виде $G_{+}^{\varepsilon}(\xi) = G_{-}^{\varepsilon}(\xi)$, $\xi \in [a_1, b_1]$. По теореме о стирании особенностей ([21], теорема 2.2, глава 4) функции $G_{+}^{\varepsilon}(z)$ и $G_{-}^{\varepsilon}(z)$ являются аналитическими продолжениями друг друга через интервал (a_1, b_1) .

Далее рассмотрим в комплексной плоскости квадрат Q_1 , для которого сегмент $[a_1, b_1]$ является диагональю, и рассмотрим семейство функций

$$F_{\eta}(z) = (z - a_1)(z - b_1)G^{\eta}(z), \quad \eta \in (0, \varepsilon],$$

в этом квадрате. Одна из сторон квадрата Q_1 имеет параметризацию $z = a_1 + te^{\frac{i\pi}{4}}$, $t \in \left[0, \frac{b_1 - a_1}{\sqrt{2}}\right]$. На этой стороне квадрата выполняется неравенство

$$|F_{\eta}(z(t))| \leq Mt \left| a_1 - b_1 + te^{\frac{i\pi}{4}} \right| \left| 1 + \frac{\sqrt{2}}{t} \right| \leq M_2.$$

Очевидно, что на границе квадрата выполняется неравенство $|F_{\eta}(z)| \leq M_2$.

Пусть $\delta \in (0, \frac{b_1 - a_1}{4})$ и пусть Q_2 – квадрат, для которого сегмент $[a_1 + \delta, b_1 - \delta]$ является диагональю. На границе квадрата Q_2 будет выполняться неравенство $|G^{\eta}(z)| \leq M_3(\delta)$ с некоторой величиной M_3 , зависящей от δ .

По теореме Монтеля семейство функций $G^{\eta}(z)$ будет компактным внутри Q_2 .

Поэтому существует голоморфная внутри Q_2 функция $H(z)$ и последовательность $\eta_n \rightarrow 0$ такие, что последовательность $G^{\eta_n}(z)$ будет равномерно на компактах, лежащих во внутренности Q_2 , сходится к функции $H(z)$. При $\Im z > 0$ последовательность $G^{\eta_n}(z)$ сходится к $G_{+}(z)$, а при $\Im z < 0$ она сходится к $G_{-}(z)$. Из сказанного следует, что функция $G_{-}(z)$ будет аналитическим продолжением функции $G_{+}(z)$ через интервал $(a_1 + \delta, b_1 - \delta)$, а в силу произвольности ε и δ через интервал (a, b) . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Теорема 5.1 является усилением леммы Карлемана об аналитическом продолжении. В оригинальной лемме Карлемана (доказательство леммы Карлемана можно найти также в [24]) рассматриваются меры с ограниченной плотностью. Приведенное доказательство теоремы 5.1 частично совпадает с доказательством леммы Карлемана.

Пусть μ – радонова мера конечного порядка на вещественной оси, $G(z) = (G_+(z), G_-(z))$ – преобразование Карлемана меры μ . Выбросим из вещественной оси множество всех таких интервалов (a, b) , что функция $G_+(z)$ аналитически продолжается через интервал (a, b) и результатом аналитического продолжения есть функция $G_-(z)$. Оставшаяся часть вещественной оси называется *спектром Карлемана* меры μ .

В связи с приведенным определением стоит заметить, что функция $G_+(z)$ может иметь аналитическое продолжение через интервал (a, b) , однако, результат такого продолжения может не совпадать с функцией $G_-(z)$. В этом случае интервал (a, b) принадлежит спектру Карлемана меры μ .

В связи с теоремой 5.1 и определением спектра Карлемана интересно отметить следующее утверждение, относящееся к проблеме гармонического синтеза. Эта проблема обсуждается в [23], [24].

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть μ – радонова мера конечного порядка на вещественной оси с ограниченным спектром Карлемана. Тогда мера μ абсолютно непрерывна и её плотность $g(t)$ есть ограничение на вещественную ось целой функции экспоненциального типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G(z) = (G_+(z), G_-(z))$ – преобразование Карлемана меры μ . Поскольку мера μ имеет конечный порядок, то существуют числа $M > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что для $\check{\mu}(r)$ (функции распределения меры $|\mu|$) будет выполняться неравенство $|\check{\mu}(r)| \leq M(1 + r^\alpha)$. Считая, что функция $\check{\mu}(r)$ нормирована условием $\check{\mu}(+0) = 0$, получим неравенство

$$\begin{aligned} |G_+(z)| &\leq \frac{1}{2} |\mu(\{0\})| + \int_{(0, \infty)} e^{-ty} d\check{\mu}(t) = \frac{1}{2} |\mu(\{0\})| + y \int_0^\infty \check{\mu}(t) e^{-ty} dt \\ &\leq \frac{1}{2} |\mu(\{0\})| + My \int_0^\infty (1 + t^\alpha) e^{-ty} dt \leq M_1 \left(1 + \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{y^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Аналогично оценивается функция $G_-(z)$. Поэтому функция $G(z)$ удовлетворяет оценке

$$|G(z)| \leq M_1 \left(1 + \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{|y|^\alpha} \right). \quad (5.9)$$

Из ограниченности спектра меры μ следует, что точка ∞ является изолированной особенностью функции $G(z)$. Рассуждения с квадратами Q_1 и Q_2 в тексте доказательства теоремы 5.1, применённые к функции $(z - a_1)^n(z - b_1)^n G(z)$, дадут, что

существуют числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $M_2 > 0$ такие, что на множестве $\{z = x + iy : |x| \geq \alpha, |y| \leq \beta\}$ будет выполняться неравенство $|G(z)| \leq M_2$. Из этого неравенства и неравенства (5.9) следует, что точка ∞ – устранимая особенность функции $G(z)$.

Легко видеть, что

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} G_+(iy) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} e^{-ty} d\mu(t) = \frac{1}{2} \mu(\{0\}),$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} G_-(iy) = - \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^0 e^{ty} d\mu(t) = -\frac{1}{2} \mu(\{0\}).$$

Из этих равенств видно, что соотношение $\mu(\{0\}) \neq 0$ противоречит тому, что ∞ – устранимая особенность функции $G(z)$. Поэтому $\mu(\{0\}) = 0$. Тем самым мы доказали, что $G(\infty) = 0$. Поэтому существуют числа $M_3 > 0$ и $R_1 > 0$ такие, что при $|z| > R_1$ будет выполняться неравенство

$$|G(z)| < \frac{M_3}{|z|}. \quad (5.10)$$

Определим теперь функцию

$$g(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{L}} G(w) e^{-itw} dw, \quad (5.11)$$

где \mathfrak{L} – замкнутая гладкая правильно ориентированная жорданова кривая, охватывающая спектр меры μ . Тем самым функция $G(w)$ является голоморфной в замыкании неограниченной области с границей \mathfrak{L} . Очевидно, что $g(t)$ – целая функция экспоненциального типа.

Далее рассмотрим при $\Im z > 0$ функцию

$$G_1(z) = \int_0^{\infty} g(t) e^{itz} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{L}} \int_0^{\infty} e^{it(z-w)} dt G(w) dw.$$

Пусть $\Im z \geq 2h$, $h > 0$ и произвольно. Поскольку спектр меры μ лежит на вещественной оси, контур \mathfrak{L} можно выбрать так, чтобы для любого $w \in \mathfrak{L}$ выполнялось неравенство $\Im w < h$. Тогда

$$G_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}} \frac{G(w)}{w - z} dw.$$

Теперь из неравенства 5.10 и теоремы Коши следует, что выполняется равенство $G_1(z) = G(z)$ при $\Im z \geq 2h$, а значит и при $\Im z > 0$.

Мы доказали, что у меры μ_1 , $d\mu_1(t) = g(t)dt$, и меры μ совпадают преобразования Карлемана в полуплоскости $\Im z > 0$. Аналогично доказывается совпадение преобразований Карлемана этих мер и в полуплоскости $\Im z < 0$. Таким образом, у мер μ и μ_1 совпадают преобразования Карлемана. Следовательно, $\mu = \mu_1$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть μ – радонова мера конечного порядка ρ на вещественной оси. Пусть спектр Карлемана Λ меры μ конечен. Тогда существуют полиномы $P_\lambda(t)$, $\lambda \in \Lambda$, $\deg P_\lambda(t) \leq \rho - 1$, такие, что

$$d\mu(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G(z)$ – преобразование Карлемана меры μ . Спектр меры μ конечен и, следовательно, ограничен. Как следует из доказательства теоремы 5.2, в этом случае функция $G(z)$ голоморфна в некоторой окрестности бесконечности, причём $G(\infty) = 0$. Было также доказано, что в рассматриваемом случае $d\mu(t) = g(t)dt$, где g – целая функция экспоненциального типа. Обозначим $g_1(t) = \int_0^t |g(u)| du$. Тогда применение формулы интегрирования по частям даёт

$$|G_+(z)| = \left| \int_0^\infty e^{itz} g(t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{ty} |g(t)| dt = e^{-ty} g_1(t)|_0^\infty + y \int_0^\infty e^{-ty} g_1(t) dt.$$

В случае, если $\rho < 0$, выполняется неравенство $|g_1(t)| \leq M$. В случае, если $\rho \geq 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $|g_1(t)| \leq M_\varepsilon |t|^{\rho+\varepsilon}$ при $t \geq 1$. Из этого следуют оценки $|G(z)| \leq M$ при $\rho < 0$, $|G(z)| \leq M_\varepsilon \left(\frac{1}{|y|}\right)^{\rho+\varepsilon}$ при $|y| \leq 1$ и $\rho \geq 0$.

Из того, что спектр конечен следует, что точки спектра являются изолированными однозначными особенностями функции $G(z)$. Из полученных оценок $G(z)$ следует, что при $\rho < 1$ эти особенности являются устранимыми. В этом случае $G(z) = 0$, $\mu = 0$. В случае $\rho \geq 1$ точки спектра могут быть полюсами функции $G(z)$ порядка не выше чем ρ . Поэтому для функции $G(z)$ справедливо представление

$$G(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{n=1}^{\rho} \frac{a_{n,\lambda}}{(z - \lambda)^n}.$$

Теперь из формулы

$$\int_{\mathfrak{L}} \frac{1}{(w - \lambda)^n} e^{-itw} dw = 2\pi i (-it)^n e^{-i\lambda t}$$

и равенства (5.11) следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $M > 0$ – фиксированное число, μ – радонова мера на вещественной оси, удовлетворяющая неравенству $|\mu|([\alpha, \beta]) \leq M$, если $\beta - \alpha \leq 1$. Пусть K – борелевская функция из пространства $L_1(-\infty, \infty)$ такая, что множество $\Lambda = \{\lambda \in (-\infty, \infty) : \hat{K}(\lambda) = 0\}$ является конечным. Пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t - u) d\mu(t) = 0, \quad u \in (-\infty, \infty).$$

Тогда существуют числа c_λ , $\lambda \in \Lambda$, такие, что $d\mu(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{-i\lambda t} dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы и из теоремы 5.1 следует, что спектр Карлемана меры μ содержится в конечном множестве Λ . Теперь из теоремы 5.3 и неравенства $\rho \leq 1$ для порядка ρ меры μ следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теоремы аналогичные теоремам 5.2-5.4 ранее доказывал Коренблум [25].

Сформулируем ещё мультипликативный вариант последней теоремы.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть $M > 0$ – фиксированное число, μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$, удовлетворяющая неравенству $|\mu|([\alpha, \beta]) \leq M$, если $\frac{\beta}{\alpha} \leq e$. Пусть K – борелевская функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что $\frac{1}{t}K(t) \in L_1(0, \infty)$, и пусть $\Lambda = \{\lambda \in (-\infty, \infty) : \int_0^\infty \frac{1}{t}K(t)t^{-i\lambda}dt = 0\}$ есть конечное множество. Пусть

$$\int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t) = 0, \quad r \in (0, \infty).$$

Тогда существуют числа c_λ , $\lambda \in \Lambda$, такие, что $d\mu(t) = \frac{1}{t} \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda t^{-i\lambda} dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим радонову меру ν на вещественной оси следующим образом $\nu([a, b]) = \mu([e^a, e^b])$. Если $b \leq a + 1$, то будем иметь

$$|\nu|([a, b]) = |\mu|([e^a, e^b]) \leq |\mu|([e^a, e^{a+1}]) \leq M.$$

Пусть $K_1(x) = K(e^x)$. Тогда K_1 – борелевская функция на вещественной оси, которая принадлежит пространству $L_1(-\infty, \infty)$. Выполняются равенства

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{t}K(t)t^{-i\lambda}dt &= \int_{-\infty}^\infty K_1(x)e^{-ix\lambda}dx, \\ \int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) d\mu(t) &= \int_{-\infty}^\infty K_1(x-u)d\nu(x) = 0, \quad u = \ln r. \end{aligned}$$

Для ядра K_1 и меры ν выполняются все условия теоремы 5.4, поэтому

$$d\nu(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{-i\lambda x} dx, \quad d\mu(t) = \frac{1}{t} \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda t^{-i\lambda} dt.$$

Теорема доказана.

В следующей теореме описываются меры μ , для которых функция $\Psi(r)$, определяемая равенством (1.2), является плотностью регулярной меры. Напомним, что функция $\gamma(t)$ определяется равенством (1.1).

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$ из класса $\mathfrak{M}(\rho(r))$, K – борелевская функция на полуоси

$(0, \infty)$ такая, что $t^{\rho-1}\gamma(t) K(t) \in L_1(0, \infty)$, $c_1 = \int_0^\infty K(t)t^{\rho-1}dt \neq 0$. Пусть множество

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in (-\infty, \infty) : \int_0^\infty K(t)t^{\rho-1-i\lambda}dt = 0 \right\}$$

является конечным. Пусть функция Ψ определяется равенством (1.2). Тогда если мера s , $ds(t) = \Psi(t)dt$, является регулярной мерой относительно уточнённого порядка $\rho(r) + 1$, причём $Fr[s] = \{\sigma\}$, где $d\sigma(t) = ct^\rho dt$, то предельное множество $Fr[\mu]$ меры μ состоит из абсолютно непрерывных мер ν , и плотность $h(t)$ каждой такой меры имеет вид

$$h(t) = \left(\frac{c}{c_1} + \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda t^{-i\lambda} \right) t^{\rho-1},$$

где c_λ – некоторые комплексные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.8 для любой меры $\nu \in Fr[\mu]$ выполняется равенство

$$\int_0^\infty K\left(\frac{t}{u}\right) d\nu(t) = cu^\rho. \quad (5.12)$$

Если $\nu_2(t) = \nu(t) - \nu_1(t)$, где $d\nu_1(t) = \frac{c}{c_1\rho}t^{\rho-1}dt$ при $\rho \neq 0$ и $d\nu_1(t) = \frac{c}{c_1}\frac{1}{t}dt$ при $\rho = 0$, то

$$\int_0^\infty K\left(\frac{t}{u}\right) d\nu_2(t) = 0. \quad (5.13)$$

Пусть $K_1(t) = t^\rho K(t)$, ν_3 – такая мера, что $d\nu_3(t) = t^{-\rho}d\nu_2(t)$. Тогда равенство (5.13) можно переписать в виде

$$\int_0^\infty K_1\left(\frac{t}{u}\right) d\nu_3(t) = 0.$$

Из соотношения $\mu \in \mathfrak{M}(\rho(r))$ следует, что функция

$$N(\alpha) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\check{\mu}(r + \alpha r) - \check{\mu}(r)}{V(r)},$$

где $\check{\mu}(r)$ – функция распределения меры $|\mu|$, является ограниченной на сегменте $[0, e]$. Из этого и теоремы 3.15 следует, что для любой меры $\nu \in Fr[\mu]$ на множестве $(0, \infty) \times [1, e]$ выполняется оценка $|\nu|([r, qr]) \leq Mr^\rho$ с некоторой постоянной M . Очевидно, что такая оценка, возможно, с другой постоянной M , выполняется и для меры ν_2 .

Существует число $\xi \in [\alpha, \beta]$ такое, что выполняются равенства

$$\int_\alpha^\beta d|\nu_3|(t) = \int_\alpha^\beta t^{-\rho} d|\nu_2|(t) = \xi^{-\rho} |\nu_2|([\alpha, \beta]).$$

Если теперь $\beta \leq e\alpha$, то

$$|\nu_3|([\alpha, \beta]) = \xi^{-\rho} |\nu_2|([\alpha, \beta]) \leq M \left(\frac{\alpha}{\xi} \right)^\rho \leq M e^{|\rho|}.$$

Справедливо также соотношение $\frac{1}{t} K_1(t) \in L_1(0, \infty)$. Таким образом, ядро K_1 и мера ν_3 удовлетворяют всем условиям теоремы 5.5. Поэтому $d\nu_3(t) = \frac{1}{t} \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda t^{-i\lambda} dt$, что эквивалентно утверждению теоремы. Теорема доказана.

Справедлив следующий вариант теоремы 5.6, в котором ограничение $c_1 \neq 0$ отсутствует.

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$ из класса $\mathfrak{M}(\rho(r))$, K – борелевская функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что $t^{\rho-1} \gamma(t) K(t) \in L_1(0, \infty)$. Пусть множество

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in (-\infty, \infty) : \int_0^\infty K(t) t^{\rho-1-i\lambda} dt = 0 \right\}$$

является конечным, причём $0 \in \Lambda$. Пусть функция Ψ определяется равенством (1.2). Тогда, если мера s , $ds(t) = \Psi(t)dt$, является регулярной мерой относительно уточнённого порядка $\rho(r) + 1$, то $Fr[s] = \{0\}$, предельное множество $Fr[\mu]$ состоит из абсолютно непрерывных мер ν , и плотность $h(t)$ каждой такой меры имеет вид

$$h(t) = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda t^{-i\lambda} \right) t^{\rho-1},$$

где c_λ – некоторые комплексные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как мера s является регулярной, то как и при доказательстве предыдущей теоремы получим равенство (5.12). Далее рассуждаем так.

Пусть ν и σ – две меры из $Fr[\mu]$, $\nu_3 = \nu - \sigma$. Имеем $\int_0^\infty K\left(\frac{t}{u}\right) d\nu_3(t) = 0$. Далее, повто-

ря рассуждения предыдущей теоремы, получаем $d\nu_3(t) = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda t^{-i\lambda} \right) t^{\rho-1} dt$. Мы

доказали, что для любой меры $\nu \in Fr[\mu]$ существует набор комплексных постоянных c_λ (вообще говоря, зависящих от меры ν) такой, что выполняются равенство $d\nu = d\sigma + d\tau$, где σ – произвольно зафиксированная мера из $Fr[\mu]$, а $d\tau(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda t^{-i\lambda}) t^{\rho-1} dt$.

Для любого $r > 0$ выполняется равенство $d\nu_r = d\sigma_r + d\tau_r$. Заметим, что $d\tau_r(t) = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda r^{-i\lambda} t^{-i\lambda} \right) t^{\rho-1} dt$. С другой стороны, поскольку мера $\nu_r \in Fr[\mu]$, то верно равенство

$$d\nu_r(t) = d\sigma(t) + \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda(r) t^{-i\lambda} \right) t^{\rho-1} dt.$$

Если $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, то из сказанного следует, что выполняется равенство

$$d\sigma_r(t) - d\sigma(t) = \left(\sum_{k=1}^n (c_k(r) - c_k r^{-i\lambda_k}) t^{-i\lambda_k} \right) t^{\rho-1} dt. \quad (5.14)$$

Из равенства (5.14) следует равенство

$$\int_0^\infty f(t)(d\sigma_r(t) - d\sigma(t)) = \sum_{k=1}^n (c_k(r) - c_k r^{-i\lambda_k}) \int_0^\infty f(t) t^{\rho-1-i\lambda_k} dt. \quad (5.15)$$

Конкретно функции $f(t)$ будут выбираться позже. Далее имеем

$$\int_0^\infty f(t) t^{\rho-1-i\lambda_k} dt = \int_{-\infty}^\infty e^{\rho x} f(e^x) e^{-i\lambda_k x} dx.$$

Выберем теперь $f(x) = f_m(x)$ так, чтобы для функции $\varphi_m(x) = e^{\rho x} f_m(e^x)$ выполнялось равенство

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi_m(x) e^{-i\lambda x} dx = \prod_{k \neq m} (\lambda - \lambda_k) \left(\frac{\sin \alpha \lambda}{\lambda} \right)^p,$$

где p – достаточно большое целое число, а вещественное число α таково, что $\sin \alpha \lambda_m \neq 0$, если $\lambda_m \neq 0$ и $\alpha = 1$, если $\lambda_m = 0$. Из определения φ_m и теоремы Винера-Пэли следует, что φ_m – финитная функция. Из формулы обращения для преобразования Фурье легко следует, что функция φ_m имеет $p - n - 3$ непрерывных производных. Из этого в свою очередь следует, что $\text{supp } f_m$ есть компакт, помещающийся на полуоси $(0, \infty)$, и что функция f_m имеет непрерывные производные до порядка $p - n - 3$ включительно. При таком выборе f равенство (5.15) принимает вид

$$\frac{1}{r^\rho} \int_0^\infty f_m\left(\frac{t}{r}\right) d\sigma(t) - \int_0^\infty f_m(t) d\sigma(t) = A_m (c_m(r) - c_m r^{-i\lambda_m}),$$

где $A_m \neq 0$. Из написанного равенства легко вывести, что каждая из функций $c_k(r)$ является бесконечно дифференцируемой на полуоси $(0, \infty)$, и что выполняется равенство $c_m(1) = c_m$. Далее, для определённости, будем считать, что $\rho > 0$. Будем также считать, что функция распределения $\sigma(t)$ меры σ нормирована условием $\sigma(0) = 0$. Тогда $\sigma_r(t) = \frac{\sigma(rt)}{r^\rho}$. Далее, интегрируя обе части равенства (5.14) по сегменту $[0, 1]$, приходим к равенству

$$\frac{\sigma(r)}{r^\rho} - \sigma(1) = \sum_{k=1}^n (c_k(r) - c_k r^{-i\lambda_k}) \frac{1}{\rho - i\lambda_k}.$$

Из этого равенства следует, что мера σ имеет бесконечно дифференцируемую плотность. Обозначим эту плотность через $h(t)$. Тогда равенство (5.14) можно преобразовать к виду

$$\frac{h(rt)}{(rt)^{\rho-1}} - \frac{h(t)}{t^{\rho-1}} = \sum_{k=1}^n (c_k(r) - c_k r^{-i\lambda_k}) t^{-i\lambda_k}.$$

Если обозначить через $H(r, t)$ правую часть полученного равенства, то из этого равенства следует, что функция $H(r, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$rH'_r(r, t) - tH'_t(r, t) = t \left(\frac{h(t)}{t^{\rho-1}} \right)'.$$

Это даёт

$$\sum_{k=1}^n (rc'_k(r) + i\lambda_k c_k(r)) t^{-i\lambda_k} = t \left(\frac{h(t)}{t^{\rho-1}} \right)'.$$

Из линейной независимости функций $t^{-i\lambda_k}$ следует, что существуют числа d_k такие, что выполняются равенства $rc'_k(r) + i\lambda_k c_k(r) = d_k$. Тогда $\left(\frac{h(t)}{t^{\rho-1}} \right)' = \sum_{k=1}^n d_k t^{-i\lambda_k - 1}$.

Считая, что $\lambda_1 = 0$, получим, что $h(t) = \left(d_1 \ln t + \sum_{k=2}^n \frac{d_k}{-i\lambda_k} t^{-i\lambda_k} + d \right) t^{\rho-1}$. Так как $h(t)$ – плотность меры $\sigma \in Fr[\mu]$, то мера σ по теореме 3.16 должна удовлетворять неравенству $|\sigma([r, er])| \leq \alpha r^\rho$ с некоторым α . Поэтому $d_1 = 0$. Мы доказали, что плотность $h(t)$ произвольной меры $\sigma \in Fr[\mu]$ имеет вид, указанный в формулировке теоремы. Далее из теоремы 4.8 следует, что $Fr[s] = \{0\}$. Теорема доказана.

В связи с теоремой 5.7 рассмотрим следующий пример. Пусть K – ядро на полуоси $(0, \infty)$ такое, что $\frac{1}{t}K(t)$, $\frac{\ln t}{t}K(t) \in L_1(0, \infty)$, $\int_0^\infty \frac{1}{t}K(t)dt = 0$. Имеем

$$\Psi(r) = \int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) \frac{\ln t}{t} dt = \int_0^\infty K(u) \frac{\ln u + \ln r}{u} du = \int_0^\infty K(u) \frac{\ln u}{u} du.$$

Пусть $\rho(r) = 0$. Мера s , $ds(t) = \Psi(t)dt$, является регулярной мерой относительно уточнённого порядка тождественно равного единице. Мера μ , $d\mu(t) = \frac{\ln t}{t}dt$, не принадлежит классу $\mathfrak{M}_\infty(0)$, а тем более классу $\mathfrak{M}(0)$.

Частный случай теоремы 5.6, когда $\Lambda = \emptyset$, приводит к следующей тауберовой теореме.

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточнённый порядок, μ – радонова мера на полуоси $(0, \infty)$ из класса $\mathfrak{M}(\rho(r))$, K – борелевская функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что $t^{\rho-1}\gamma(t)K(t) \in L_1(0, \infty)$. Пусть функция $\int_0^\infty K(t)t^{\rho-1-i\lambda}dt$ не обращается в ноль на вещественной оси, и пусть функция Ψ определяется равенством (1.2). Тогда, если мера s , $ds(t) = \Psi(t)dt$, является регулярной мерой относительно уточнённого порядка $\rho(r) + 1$, то мера μ является регулярной мерой относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, причём если $Fr[s]$ состоит из меры с плотностью ct^ρ , то $Fr[\mu]$ состоит из меры с плотностью $\frac{c}{c_1}t^{\rho-1}$, где $c_1 = \int_0^\infty K(t)t^{\rho-1}dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 5.6 предельное множество $Fr[\mu]$ состоит из единственной меры. Поэтому эта мера регулярна. Её предельное множество описано в теореме 5.6. Теорема доказана.

Как следует из теоремы 3.19 для положительной меры μ её регулярность относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ эквивалентна выполнению равенства

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu([ar, br])}{V(r)} = c \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}, \quad 0 < a < b < \infty,$$

с некоторой постоянной c . При этом ρ может быть произвольным вещественным числом (в случае $\rho = 0$ правая часть написанного равенства определяется по непрерывности и равна $c \ln \frac{b}{a}$). В случае $\rho > 0$ написанное равенство эквивалентно равенству $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu((1, r])}{V(r)} = \frac{c}{\rho}$, а в случае $\rho < 0$ оно эквивалентно равенству $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu((r, \infty))}{V(r)} = -\frac{c}{\rho}$.

Регулярные знакопеременные меры описаны в теореме 3.20.

В теореме 5.8 рассматривается произвольный уточнённый порядок. Как уже отмечалось во вступлении, уже частный случай теоремы 5.8, когда $\rho(r) \equiv 1$, является усилением второй тауберовой теоремы Винера по нескольким направлениям.

Список литературы

- [1] Б.Я. Левин, *Распределение корней целых функций*. ГИТТЛ, М., 1956.
- [2] N.H. Bingham, C.H. Goldie, J.L. Teugels, *Regular variation*. Cambridge university press, Cambridge, London, New York, New Roshelle, Melburn, Sydney, 1987.
- [3] H.S.A. Potter, *The mean value of a Dirichlet series*, *PLMS*, **47** (1942), 1-19.
- [4] В.С. Азарин, *Об асимптотическом поведении субгармонических функций*, Мат. сборник, **108:2** (1979), 147-167.
- [5] D.V. Widder, *The Laplace transform*. Princeton university press, Princeton, 1946.
- [6] Г. Харди, *Расходящиеся ряды*. ИИЛ, М., 1951.
- [7] J. Korevaar, *Tauberian theory. A Century of Development*, Springer, Berlin, 2004.
- [8] G. Valiron, *Sur les fonctions entieres d'ordre fini, et d'ordre nul, et en particuliere les fonctions a correspondance reguliere*, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* (**3**)**5**, (1913), 117-257.
- [9] А.Ф. Гришин, Т.И. Малютина, *Об уточнённом порядке*, *Комплексный анализ и математическая физика, сборник*. Красноярск, (1998), 10-24.
- [10] Н. Бурбаки, *Интегрирование*, Наука, ГРФМЛ, М., 1977.
- [11] Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц, *Линейные операторы*, Общая теория. ИИЛ, М., 1962.
- [12] Н.С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, ГРФМЛ, М., 1966.

- [13] В.В. Немыцкий, В.В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ГИТТЛ, М.-Л., 1949.
- [14] V. Azarin, *Growth theory of subharmonic functions*. Birkhauser, Basel, Boston, Berlin, 2009.
- [15] В.С. Азарин, В.Б. Гинер, *О строении предельных множеств целых и субгармонических функций*, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, **38** (1984), 27-36.
- [16] А.Ф. Гришин, Т.И. Малютина, *Функции плотности*, *Математическая физика, анализ, геометрия*, **7:4** (2000), 384-414.
- [17] А. Шуиги, *Субгармонические функции с крайне нерегулярным ростом*, *Вісник Харківського університету. Сер. "Математика, прикладна математика і механіка"*. **56:749** (2006), 80-85.
- [18] А.Ф. Гришин, Т.И. Малютина, *Новые формулы для индикаторов субгармонических функций*, *Математическая физика, анализ, геометрия*, **12(1)** (2005), 25-72.
- [19] А.Ф. Гришин, *Простейшая тауберова теорема*, *Математические заметки*, **74:2** (2003), 221-229.
- [20] Н. Виннер, *Интеграл Фурье и некоторые его приложения*, ИИЛ, М., 1963.
- [21] М.А. Евграфов, *Аналитические функции*, Наука, ГРФМЛ, М., 1968.
- [22] T. Carleman, *L'integrale de Fourier et question qui s'y rattachent*. Almqvist und Wiksels, Uppsala, 1944.
- [23] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, Т. 1, Наука, ГРФМЛ, М., 1975.
- [24] В.П. Гурарий, *Групповые методы коммутативного гармонического анализа. Коммутативный гармонический анализ – 2*, Итоги науки и техники. Серия "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления". **25**, ВИНТИ, М., 1988.
- [25] Б.И. Коренблум, *Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстро растущих функций*, *Труды Московского математического общества*, **7** (1958), 121-148.

А. Ф. Гришин (A. F. Grishin)

E-mail: grishin@univer.kharkov.ua

И. В. Поединцева (I. V. Poedintseva)

E-mail: Irina.V.Poedintseva@univer.kharkov.ua